序　言

函数逼近论有着悠久的历史。半个多世纪以来的不断发展，已经使它成为一个既富有深刻理论内容、又有着巨大应用价值的分析数学分支。特别，自从1968年国外创办逼近论杂志以来，这门数学的各种科研成果，犹如雨后春笋，美不胜收。近年来我们国内的逼近论研究工作者队伍也在日益成长发展着。

同国外的情况一样，国内办有计算数学专业的高等院校，近年来都开设了逼近论课程。本书作者们曾在吉林大学相继开设此课程达十余次。本书的基本题材内容，便是根据历年所用教材经过多次修改增订而成。

作为一本逼近论基础理论参考书或自学工具书，我们认为有必要较全面地向读者展示这门数学最基本最重要的知识内容，同时也必须尽可能帮助读者领会和掌握这门数学所独有的方法与技巧。正是采取这样的观点，所以在本书中，除了专章介绍十分有用的样条函数方法与非线性逼近方面的基础知识之外，特别还着重讲解了函数构造论等方面的古典理论成果与方法。此外，本书还介绍了一系列显式表示的逼近方法与逼近算子，因为这些方法与算子具有计算上的能行性，对希望应用逼近论工具的科技工作者说来，显然是最受欢迎的。

本书各章之末都附有难易不均的习题。这些习题仅供自学者参考练习之用。其中有一些个别难题，如果读者一时不能顺利地解出，那也不用气馁，因为那些命题原是往年人家论

文中的科研成果，作这样的习题就等于练习做科学研究。

由于我们把讲义教材发展成为书稿形式的时间过程较为仓促，再加上理论水平有限，所以书中难免会有缺点和错误，希望读者同志们批评指正。

徐利治　王仁宏　周蕴时

1980年6月于大连

目　录

第一章 插值方法

插值方法是数值分析很古老的一个分支。它有着悠久的历史。等距结点内插公式是由我国隋朝数学家刘焯(公元 544 ~610 年)首先提出的；而不等距结点内插公式是由唐朝数学家张遂（公元 683~727 年）提出的。这比西欧学者发表相应结果早一千多年。

插值方法在数值分析的许多分支(例如，数值积分，数值微分，微分方程数值解，曲线或曲面拟合，近似计算函数值，等等)均有应用。下面，我们仅以近似计算函数值为例来说明。

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

及 $\bar{x}\neq x_i(i=0, 1, \cdots, n)$， 问应该如何估值 $\bar{y}=f(\bar{x})$。对于函数关系 $y=f(x)$， 我们所知道的仅仅是上述的表列值。表列值是间接求得的，例如是由实验(观测)得来的，或者是从级数或微分方程求得的。

为了估值 $\bar{y}$， 我们可以使用插值方法。插值方法的目的是寻求简单的连续函数 $\varphi(x)$，使它在 $n+1$ 个点 x_0, x_1, $\cdots$, x_n 处取给定值 $\varphi(x_i)=y_i=f(x_i)(i=0, 1, \cdots, n)$，而在别处希望它能近似地代表函数 $f(x)$。 因为 $\varphi(x)$ 已是有解析表达式的简单函数，所以它在 $x=\bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来。这样，我们就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的近似值了。

称给定点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值结点。称函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的关于结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的插值函数。称 $y=f(x)$ 为被插函数。

严格地说，插值方法一词只用于 $\bar{x}$ 落在给定点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之间的情形，所以也称它为内插法。如果 $\bar{x}$ 落在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之外，并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的值近似地代替 $f(\bar{x})$，则一般称这种近似计算函数值的方法为外推法。

在这一章，我们只研究多项式插值，亦即 $\varphi(x)$ 是 x 的多项式。这不仅仅因为多项式是最简单的函数，而且因为在许多场合函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来。此外，用多项式作插值函数可使我们满意地解决一系列有实际应用价值的重要问题，其中特别注目的就是数值积分与数值微分的问题。

在这一章我们没有谈及三角插值法。其实，只要理解了代数多项式插值方法的实质，读者就不难自行导出关于三角多项式插值方法的一系列平行于代数多项式插值方法的理论结果。

§1. Lagrange 插值公式

设 $y=f(x)$ 是实变量 x 的单值函数。又设已知 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值为 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，亦即 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$。于 1795 年 Lagrange 证明了下面的定理。

定理 1 有唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件：

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n)。 \tag{1.1}$$

【证】 令 $l_i(x)(i=0, 1, \cdots, n)$ 表 n 次多项式，考虑形如

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \tag{1.2}$$

的 n 次多项式。若 $l_i(x)$ 满足条件：

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i,\\ 1, & j=i,\end{cases} \tag{1.3}$$

则由(1.2)式确定的 n 次多项式满足条件(1.1)。因此，问题归结为构造满足条件(1.3)的 n 次多项式 $l_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$。

依条件(1.3)，$l_i(x)$应有 n 个零点 $x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$。因为 $l_i(x)$ 是 n 次多项式，所以必有

$$l_i(x)=A_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 A_i 是一常数。此常数可以依条件 $l_i(x_i)=1$ 确定：

$$A_i=1/(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)。$$

从而，

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}。$$

引进记号 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，则

$$l_i(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}, \tag{1.4}$$

其中 $\omega'(x_i)=\left[\frac{d\omega}{dx}\right]_{x=x_i}$。

综上所述，当 n 次多项式 $l_i(x)$ 由(1.4)式确定时，n 次多项式(1.2)满足条件(1.1)。现在我们证明，这样的多项式是唯一的。换言之，若还有一 m 次多项式 $\bar{P}_m(x)$ $(m\leqslant n)$满足条件(1.1)，则必有 $\bar{P}_m(x)\equiv P_n(x)$。考虑差函数

$$R_n(x)=P_n(x)-\bar{P}_m(x)。$$

显然 $R_n(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，并且由于 $P_n(x)$ 与 $\bar{P}_m(x)$都满足条件(1.1)，故有

$$R_n(x_i)=0 \quad (i=0, 1, \cdots, n)。$$

依代数学基本定理可知 $R_n(x)\equiv 0$，从而 $P_n(x)\equiv\bar{P}_m(x)$。证

毕。

通常称条件(1.1)为插值条件；称 $l_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 为 Lagrange 因子；称多项式(1.2)为 Lagrange 插值多项式。定理1也可以描述性地叙述为，有且仅有一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同点上取相同的数值。定理1的几何意义是，有且仅有一条 n 次的代数曲线通过平面上预先给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i) $(i=0, 1, \cdots, n$；当 $i\neq j$ 时，$x_i\neq x_j)$。

Lagrange 插值公式(1.2)结构紧凑、思想清晰，所以至今在理论分析上仍有重要价值。

例1 已知 $f(-1)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=1$。求 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式。

【解】 依(1.4)，有 $(x_0=-1,\ x_1=1,\ x_2=2)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{1}{6}(x^2-3x+2),$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-\frac{1}{2}(x^2-x-2),$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x^2-1)。$$

从而，

$$P_2(x)=\frac{1}{6}[2(x^2-3x+2)-3(x^2-x-2)+2(x^2-1)]$$

$$=\frac{1}{6}(x^2-3x+8)。$$

例2 设 $f(x)=e^x$，则

$f(-1)=0.36787$, $f(1)=2.71828$, $f(2)=7.38906$。

依 Lagrange 插值公式有

$$e^x\approx P_2(x)=1.16519x^2+1.17520x+0.37788,$$

§2. Newton 插值公式

Lagrange 插值公式的缺点是，当插值结点的个数有所变动时(例如，为了提高精度，有时需要增加插值结点的个数)，Lagrange 因子 $l_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$就要随之发生变化，从而整个公式的结构也要发生变化，这在计算实践中是不方便的。为了克服它的上述缺点，在这一节中我们引进 Newton 型的插值公式。

显然，$n+1$ 个结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的 n 次 Lagrange 插值多项式也可以写成下列形式：

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

下面，我们来确定上式中的 $a_0, a_1, \cdots, a_n$。

令 $P_{n-1}(x)$ 表示 n 个结点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 上的$(n-1)$次 Lagrange 插值多项式。由于

$$P_n(x_i)=P_{n-1}(x_i)=y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n-1),$$

所以

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

此处 c 为常数，由条件 $P_n(x_n)=y_n$ 可以定出

$$c=\frac{y_n-P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}。$$

又因为
$$P_{n-1}(x_n)=\sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i(x_n),$$

故又有

$$\begin{aligned}c=&\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\\&+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\\=&\sum_{i=0}^{n}y_i\left\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\right\}^{-1}。\end{aligned}$$

取记号

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)=c=\sum_{i=0}^{n} y_i \left\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n} (x_i-x_l)\right\}^{-1}, \quad (2.1)$$

得 $P_n(x)$ 与 $P_{n-1}(x)$ 之间的关系式:

$$P_n(x)=P_{n-1}(x) \\ +f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。$$

同理,

$$P_{n-1}(x)=P_{n-2}(x) \\ +f(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})。$$

继续下去,最终得到

$$P_n(x)=f(x_0)+f(x_0, x_1)(x-x_0)+\cdots \\ +f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})。 \quad (2.2)$$

公式(2.2)就是 Newton 型的插值公式。系数 $f(x_0)$, $f(x_0, x_1)$, $\cdots$, $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 由(2.1)式确定 [*]。

Newton 插值公式的系数很不好记,因此有必要另寻方法确定它们。为此,我们引进差商的概念,并指出 Newton 插值公式中各系数 $f(x_0, x_1, \cdots, x_i)$ $(i=1, \cdots, n)$ 即是 $f(x)$ 的 i 阶差商。设已知不同的自变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值 $f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$,我们称

$$f(x_i, x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j} \quad (i\neq j)$$

为 $f(x)$ 的一阶差商(或均差)。一阶差商的一阶差商

$$f(x_i, x_j, x_k)=\frac{f(x_i, x_j)-f(x_j, x_k)}{x_i-x_k} \quad (i\neq k)$$

叫做 $f(x)$ 的二阶差商。一般说来,我们称 $(n-1)$ 阶差商的一

---

[*] 我们规定,当 $n=0$ 时, $\left\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n} (x_i-x_l)\right\}=1$。

阶差商

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0)}{x_n - x_0}$$

为函数 $f(x)$ 的 n 阶差商。

差商有以下诸性质:

1. 若 $F(x) = cf(x)$, c 为常数,则

$$F(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = cf(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)。$$

2. 若 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则

$$F(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) + g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)。$$

3. 若 $f(x) = x^m$, m 为自然数,则

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = \begin{cases} 0, & n > m, \\ 1, & n = m, \\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-n \text{ 次的齐次函数}, & n < m。\end{cases}$$

4. 差商 $f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)$ 是 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的对称函数,亦即当任意调换 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的位置时,差商的值不变。例如

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = f(x_n, x_0, \cdots, x_{n-1})。$$

5. 差商可以表示成两行列式之商

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}。$$

性质1和2是很简单的，由定义直接可以推出。现在我们证明性质3。x^m 的一阶差商可根据定义直接计算出来：

$$f(x_1, x_0)=\frac{x_1^m-x_0^m}{x_1-x_0}=x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x_0+\cdots+x_0^{m-1}。$$

如所见，它是 x_1, x_0 的 $m-1$ 次齐次函数。

相继作出各阶差商并依完全归纳法，可证实下列公式：

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0)=\sum x_0^{r_0}x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n},$$

$$r_n+r_{n-1}+\cdots+r_0=m-n。$$

此处求和运算遍及所有可能的形如 $x_n^{r_n}x_{n-1}^{r_{n-1}}\cdots x_0^{r_0}$ 的 x_n, x_{n-1}, $\cdots$, x_0 的 $m-n$ 次齐次项。这样便证明了性质3。

次之，证明性质4。作出相继的各阶差商后，不难看出它们是由形如 $f(x_i)/\prod\limits_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)$ 的 $(n+1)$ 个项的和表出的。由完全归纳法，易求得 $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 可由(2.1)式的右端表出。使用前面的记号 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，也可将它写成

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

如此便证实了性质4。

最后，用完全归纳法同样可以证明性质5。证明过程中要用到 Vandermonde 行列式的概念与性质，可参考本章习题1。

为了做数值计算，常利用形式如下的差商表：

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$

由性质 4 得知 Newton 插值公式 (2.2) 中的系数$f(x_0)$，$f(x_0, x_1)$，…，$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 恰好就是已知函数$f(x)$ 的 0 阶，1 阶，…，n 阶差商的值(在差商表中已分别用横线将它们标出)。因此，当已知 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$时，利用差商表可以很容易地算出$f(x)$ 各阶差商的值，而不必去记忆公式(2.1)。

因为在$(n+1)$个不同的点 x_0, x_1, …, x_n 上取给定值的次数不超过 n 的多项式是唯一的，所以次数相同的 Newton 插值多项式与 Lagrange 插值多项式是恒等的，它们的差异仅是书写形式不同而已。但是，这种差异为计算实践带来了很大的方便。实际上，对于 Nowton 插值公式来说，当需要增加一个插值结点时，只需在原插值多项式的后面再添加一个新项就可以了。

例 1 已知列表函数:

x	2	3	5	6
y	5	2	3	4

求这个函数的插值多项式。

【解】 先造好下列的差商表:

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2	$\underline{5}$			
		$\underline{-3}$		
3	2		$\underline{\frac{7}{6}}$	
		$\frac{1}{2}$		$\underline{-\frac{1}{4}}$
5	3		$\frac{1}{6}$	
		1		
6	4			

然后将从上表顶部对角线上取得的值 $f(x_0)$, $f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2)$, $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ 代入公式(2.2)，便得到了要求的多项式:

$$P_3(x)=5-3(x-2)+\frac{7}{6}(x-2)(x-3)$$
$$-\frac{1}{4}(x-2)(x-3)(x-5)。$$

§3. 插值余项

设 $P_n(x)$ 是在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处关于 $f(x)$ 的插值多项式。我们希望知道，当 $x \neq x_k$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ 时，$f(x)$ 与 $P_n(x)$ 的偏差。所谓偏差，意指此方法所固有的误差，而忽略了在计算 $P_n(x)$ 时造成的舍入误差。通常，舍入误差与在逼近中的固有误差相比是小的。按习惯，称

$$E(f; x)=f(x)-P_n(x) \tag{3.1}$$

为插值误差(或插值余项)。下面的定理给出了 $E(f; x)$ 的表达式。

定理 2 若 $f(x)$ 于包含着插值结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微，则对任意 $x \in [a, b]$，有与 x 有关的 ξ 存在 $(a<\xi<b)$，使得

$$E(f; x)=f(x)-P_n(x)=\frac{\omega(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{3.2}$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$。

【证】 今取一点 $x \in [a, b]$，显然当 $x=x_0, x_1, \cdots, x_n$ 时(3.2)式是自然满足的。以下设 x 不是插值结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，作辅助函数

$$F(z)=f(z)-P_n(z)-\frac{\omega(z)}{\omega(x)}(f(x)-P_n(x))。 \tag{3.3}$$

显然 $F(z)$ 于$[a, b]$上 $n+1$ 次可微，并且 $F(x)=0$, $F(x_j)=0(j=0, 1, \cdots, n)$。因为 $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 各不相同，由 Rolle 定理知 $F'(z)$ 于(a, b)内至少有 $n+1$ 个不同的根。同理，再依 Rolle 定理，$F''(z)$ 于 (a, b) 内至少有 n 个不同的根。依此类推，最后知 $F^{(n+1)}(z)$ 于(a, b)内至少有一个根 ξ，亦即由(3.3)式应有

$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{(n+1)!}{\omega(x)}(f(x)-P_n(x))=0。$$

由此，便得到了公式(3.2)。证毕。

通常我们并不知道 (3.2) 式中的点 ξ (一旦知道了 ξ，就知道了精确的误差)，尽管如此，我们还是能从(3.2)式得到有用的信息。例如，若 $f^{(n+1)}(x)$ 在$[a, b]$上有上界 M_{n+1}，亦即

$$M_{n+1}=\sup_{a<x<b}|f^{(n+1)}(x)|,$$

则由(3.2)式立刻得到

$$|E(f; x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|, \quad a\leqslant x\leqslant b。\tag{3.4}$$

显然，Newton 插值公式与 Lagrange 插值公式有相同的插值余项。

设已知 $\bar{y}_j=f(\bar{x}_j)$ $(j=0, 1, \cdots, m)$，并且 $m\gg n+1$。习知，为了构造一个 n 次插值多项式，只需要 $n+1$ 个插值结点。因此自然提出这样的问题：在所有的已知点$(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ $(j=0, 1, \cdots, m)$的横坐标 $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m(\bar{x}_i\neq\bar{x}_j, i\neq j)$ 中，如何选取插值结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，方能使得 $|E(f; x)|$ 为最小？由(3.2)式知应取 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$|\omega(x)|=|x-x_0||x-x_1|\cdots|x-x_n|=\min。\tag{3.5}$$

为此，只须从 $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m$ 中选择使差

$$|x-\bar{x}_j| \quad (j=0, 1, \cdots, m)$$

取最小值的 $\bar{x}_j$ 作为第一个插值结点 x_0。然后，在剩下的m个点中再选择使得$|x-\bar{x}_j|$为最小的点作为第二个插值结点x_1。如此等等，直至选出 x_n 为止。显然，这样选取的 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足(3.5)的要求。

关于在整个插值区间上的余项极小化问题，将在第二章中进行讨论。

例 1 设 $f(x)=\log x$*)，并假定已给出值表：

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\log x$	−0.916291	−0.693147	−0.356675	−0.223144

试近似估值 log(0.6)，并指出精度。

【解】 利用 4 点 3 次 Lagrange 插值公式。简单计算过程如下：

$$l_1(x)=\frac{1}{0.012}(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8),$$

$$l_2(x)=\frac{1}{0.006}(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8),$$

$$l_3(x)=-\frac{1}{0.006}(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8),$$

$$l_4(x)=\frac{1}{0.012}(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7);$$

$$l_1(0.6)=-\frac{1}{6}, \qquad l_2(0.6)=\frac{2}{3},$$

$$l_3(0.6)=\frac{2}{3}, \qquad l_4(0.6)=-\frac{1}{6};$$

*) 本书中均用 log x 表示自然对数，以后不另作说明。

$$\log(0.6) \cong -\frac{1}{6}\log(0.4)+\frac{2}{3}\log(0.5)+\frac{2}{3}\log(0.7)$$

$$-\frac{1}{6}\log(0.8) = -0.509975。$$

又因为 $f^{(4)}(x) = -6/x^4$，所以

$$\max_{[0.4,0.8]}|f^{(4)}(x)| = 6/(0.4)^4 < 234.4。$$

从而，依公式(3.4)，

$$|E(f;0.6)| < \frac{1}{24}(0.0004)(234.4) < 0.00391。$$

综合上述，我们有

真值：　$\log(0.6) = -0.510326$，

近似值：$P_3(0.6) = -0.509975$，

真误差：$\log(0.6) - P_3(0.6) = -0.000851$，

估计的上界：$|\log(0.6) - P_3(0.6)| < 0.00391$。

例 2　给定 $x = 0.00, 0.20, 0.30, 0.50$ 处的 $\operatorname{sh}x$ 的值。求 $\operatorname{sh}0.23$ 的值。

【解】　先构造差商表：

x	$\operatorname{sh}x$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
$x_2=0.00$	0.00000			
		1.0067		
$x_0=0.20$	0.20134 ↘		↗ 0.08367 ↘	
		1.0318		0.17333
$x_1=0.30$	0.30452		0.17033	
		1.0829		
$x_3=0.50$	0.52110			

由上表得 $f(x_0)=0.20134$，$f(x_0, x_1)=1.0318$，$f(x_0, x_1, x_2)=0.08367$，$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0.17333$。再依 Newton 公式得

$$f(0.23)\cong 0.20134+(0.03)(1.0318)$$
$$+(0.03)(-0.07)(0.08367)$$
$$+(0.03)(-0.07)(0.23)(0.17333)$$
$$=0.20134+0.030954-0.000176-0.000084$$
$$=0.23203。$$

$$E(f;0.23)=\frac{\operatorname{sh}^{(4)}(\xi)}{4!}(0.23)(0.03)(-0.07)(-0.27)。$$

因为在区间(0, 0.5)上，$0<\operatorname{sh}x<0.52110$，所以

$$E(f;0.23)<0.00000543\times 0.52110<0.00000283。$$

§4. 有限差分及其性质

在这一节，介绍有限差分的概念。设已知函数$f(x)$在一串等距结点x_0+jh($j=0, 1, \cdots, n, \cdots$)上的值$f(x_0)$, $f(x_0+h)$, $\cdots$, $f(x_0+nh)$, $\cdots$。我们定义表达式

$$\Delta f(x_0+jh)=f(x_0+(j+1)h)-f(x_0+jh)$$

为$f(x)$在点x_0+jh处的一阶有限差分，或简称**一阶差分**。一阶差分的一阶差分叫二阶差分，记为

$$\Delta^2 f(x_0+jh)=\Delta f(x_0+(j+1)h)-\Delta f(x_0+jh)。$$

一般说来，n阶差分定义为$n-1$阶差分的一阶差分：

$$\Delta^n f(x_0+jh)=\Delta^{n-1}f(x_0+(j+1)h)-\Delta^{n-1}f(x_0+jh)。$$

例如
$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0),$$
$$\Delta^2 f(x_0)=\Delta f(x_0+h)-\Delta f(x_0),$$
$$\Delta^3 f(x_0)=\Delta^2 f(x_0+h)-\Delta^2 f(x_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

按定义可知符号Δ满足指数律：

$$\Delta^p\Delta^q f(x_0)=\Delta^{p+q}f(x_0),$$

其中p, q是正整数。

有限差分的理论是微分学的原始形式。在历史上，微分学正是由有限差分的理论产生的，所以差分与微分有着极其相似的性质。不妨列举如下：

1．常数的差分等于零，亦即若 $f(x)\equiv c$，则

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=c-c=0。$$

2．常数因子可以提到差分号外，亦即若 k 为常数，则有

$$\Delta kf(x)=kf(x+h)-kf(x)=k(f(x+h)-f(x))$$
$$=k\Delta f(x)。$$

3．如果当 $x=x_0+jh(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 时，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i(x),$$

其中 c_i 是一些常数，则用归纳法可以证明

$$\Delta^n f(x_0)=\sum_{i=1}^{k}c_i\Delta^n\varphi_i(x_0)。$$

4．如果当 $x=x_0+jh(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 时，

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x),$$

则
$$\Delta^n f(x_0)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta^\nu\varphi(x_0)\Delta^{n-\nu}\psi(x_0+\nu h)。$$

用归纳法可以证明上述结论。

5．设 $P_n(x)$ 为一 n 次多项式(最高次项的系数为 a_n)，则当 $k<n$ 时 $P_n(x)$ 在 x_0 处的 k 阶差分为 x_0 的 $n-k$ 次多项式；当 $k=n$ 时是常数，即 $\Delta^n P_n(x)=a_n h^n n!$；当 $k>n$ 时为零。

不失一般性，读者可以就 $P_n(x)=x^n$ 的情形，用归纳法证明这一结论。

6．设已知 $f(x_0+jh)(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的值，用逐次代入法容易证明，计算差分有以下公式：

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_0)=\Delta f(x_0+h)-\Delta f(x_0)$$
$$=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0),$$

··

$$\Delta^n f(x_0)=\Delta^{n-1}f(x_0+h)-\Delta^{n-1}f(x_0)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(x_0+(n-i)h)。\qquad(4.1)$$

按相似的方法，对(4.1)型方程用逐次消元法，我们得到

$$f(x_0+nh)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i f(x_0)。\qquad(4.2)$$

实际计算差分时，常用如下表格（差分表）：

x \ Δ	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	…
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	⋮	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	⋮		
		Δy_3	⋮			
x_4	y_4	⋮				
⋮	⋮					

下面的定理揭示了函数的差商，差分和导数之间的关系。

定理 3 设函数 $y=f(x)$ 在包含结点 $x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}$ 的区间 (a,b) 上为 k 次可微函数，则

$$f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})=\Delta^k y_j/k!h^k,\qquad(4.3)$$

$$f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})=f^{(k)}(\xi)/k!,\qquad(4.4)$$

$$\Delta^k y_j/h^k=f^{(k)}(\xi)。\qquad(4.5)$$

此处 $\min(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})<\xi<\max(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})$。

【证】 首先，用归纳法容易证明(4.3)式。现在证明(4.4)

式。令 $P_k(x)$ 表 $f(x)$ 的在结点 $x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}$ 上的 k 次插值多项式。因为插值余项 $R(x)=f(x)-P_k(x)$ 于 $x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}$ 处为零，类似于定理 2 的证明知有某 $\xi(\min(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})<\xi<\max(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}))$，使得

$$R^{(k)}(\xi)=f^{(k)}(\xi)-P_k^{(k)}(\xi)=0。$$

另一方面，由 Newton 插值公式知道

$$P_k^{(k)}(\xi)=k!f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})。$$

联合以上两式可得(4.4)式。最后，由(4.3)与(4.4)式即可导出(4.5)式。证毕。

习知，k 次多项式的 $k+1$ 阶导数等于零，因此它的 $k+1$ 阶差分也等于零。这个性质使得我们可以借助于差分表的性质来确定所需的插值多项式的次数。例如，当发现函数的第 k 阶差分为常数或近似为常数时，则用 k 次多项式去作插值多项式就会有较好的结果。

上面介绍的差分叫*向前差分*。鉴于计算实践的需要，我们再介绍一下*向后差分*和*中心差分*的概念。

设 $y_j=f(x_0-jh)\ (j=0, 1, \cdots, n)$ 为已知，则分别定义

$$\nabla f(x_0)=f(x_0)-f(x_0-h),$$
$$\nabla^2 f(x_0)=\nabla f(x_0)-\nabla f(x_0-h),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nabla^n f(x_0)=\nabla^{n-1} f(x_0)-\nabla^{n-1} f(x_0-h)$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的向后 1 阶, 2 阶, $\cdots$, n 阶差分。

由向后差分定义，容易验证

$$\nabla f(x_k)=f(x_k)-f(x_{k-1})=hf(x_k, x_{k-1}),$$
$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_k)&=\nabla f(x_k)-\nabla f(x_{k-1})\\&=hf(x_k, x_{k-1})-hf(x_{k-1}, x_{k-2})\\&=2h^2 f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}),\end{aligned}$$

$$\nabla^n f(x_k)=n!h^n f(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-n})。$$

在实际计算向后差分时，我们常采用向后差分表：

x_{n-3}	f_{n-3}			
		∇f_{n-2}		
x_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla^2 f_{n-1}$	
		∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_n$
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$	
		∇f_n		
x_n	f_n			

由方程 $\delta f(x_0)=f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)$

定义的差分叫作一阶中心差分。类似地，称

$$\delta^n f(x_0)=\delta^{n-1}f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-\delta^{n-1}f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)$$

为 n 阶中心差分。容易验证$\left(f_{\frac{1}{2}}=f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right.$，余类推$\Big)$

$$\delta f_{\frac{1}{2}}=f_1-f_0=hf(x_0, x_1),$$

$$\delta f_{-\frac{1}{2}}=f_0-f_{-1}=hf(x_k, x_{-1}),$$

$$\begin{aligned}\delta^2 f_1&=\delta f_{1+\frac{1}{2}}-\delta f_{1-\frac{1}{2}}=(f_{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}-f_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}})-(f_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-f_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}})\\&=(f_2-f_1)-(f_1-f_0)=h(f(x_1, x_2)-f(x_0, x_1))\\&=2h^2 f(x_0, x_1, x_2),\end{aligned}$$

$$\delta^{2m+1}f_{k+\frac{1}{2}}=h^{2m+1}(2m+1)!f(x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m}, x_{k+m+1}),$$

$$\delta^{2m+1}f_{k-\frac{1}{2}}$$

$$=h^{2m+1}(2m+1)!f(x_{k-m-1}, \cdots, x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m}),$$

$$\delta^{2m}f_k=h^{2m}(2m)!f(x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m})。$$

可以利用下表计算中心差分：

x_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-\frac{3}{2}}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
x_2	f_2				

三种差分之间有下列关系：

(i) $\nabla^k f_0 = \Delta^k f_{-k}$,

(ii) $\delta^{2k} f_0 = \Delta^{2k} f_{-k}$,

(iii) $\delta^{2k+1} f_{\frac{1}{2}} = \Delta^{2k+1} f_{-k}$。

§5. 等距结点上的插值公式

对于给定的等距结点的数据，我们可以灵活地运用插值余项极小化原则，给出适应具体需要的插值公式。一般说来，在左端点 $x=x_0$ 附近进行插值宜用 Newton 向前插值公式，在右端点 $x=x_n$ 附近插值宜用 Newton 向后插值公式。如果在插值区间中间进行插值，宜用带中心差分的插值公式。下面分别予以简要介绍。

5.1 Newton 向前插值公式

设已知 $y_i=f(x_0+ih)\,(i=0, 1, \cdots, N)$，据求于

$$x=x_0+th,\quad 0\leqslant t\leqslant 1/2$$

处 $f(x)$ 的近似值。按余项极小化原则，插值结点应取 x_0, x_1, $\cdots$, x_n $(n\leqslant N)$。注意差商与差分的关系(4.3)，由Newton

插值公式(2.2)得到

$$f(x)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0+E(f;x), \tag{5.1}$$

其中

$$E(f;x)=h^{n+1}\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

$$x_0<\xi<x_0+nh。$$

通常,称公式(5.1)为 Newton 向前插值公式。

5.2 Newton 向后插值公式

设 $x=x_n+th$, 由插值公式(2.2)可得 Newton 向后插值公式:

$$f(x)=f(x_n+th)=y_n+\frac{t}{1!}\nabla y_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n+E(f;x), \tag{5.2}$$

此处 $$E(f;x)=h^{n+1}\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

其中 ξ 在诸 x_i 与 x 之间。

公式(5.2)适用于计算函数在最后一个结点附近的近似值(内插或外推)。

5.3 Gauss 插值公式

现在我们引进带中心差分的插值公式。在插值公式(2.2)中用结点列

$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_{-1}=x_0-h,\ x_2=x_0+2h,\ x_{-2}=x_0-2h,\ \cdots$

替代结点列 $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \cdots$, 得到

$$f(x)=f_0+(x-x_0)\frac{\delta f_{\frac{1}{2}}}{1!h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\delta^2 f_0}{2!h^2}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\frac{\delta^3 f_{\frac{1}{2}}}{3!h^3}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})(x-x_2)\frac{\delta^4 f_0}{4!h^4}+\cdots。$$

若设 $x=x_0+th$, $n=2m$（或 $2m+1$），则有

$$f(x)=f(x_0+th)$$

$$=f_0+t\delta f_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)}{2!}\delta^2 f_0+\frac{t(t^2-1)}{3!}\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!}\delta^4 f_0+\cdots$$

$$+\frac{t(t^2-1)(t^2-2)\cdots(t^2-(m-1)^2)(t-m)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0$$

$$\left(或+\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{\frac{1}{2}}\right)+E(f;x)。\tag{5.3}$$

在(5.3)式中，当 $n=2m$ 时取至偶数阶差分 δ^{2m}；当 $n=2m+1$ 时取至奇数阶差分 δ^{2m+1}。

插值余项为：当 $n=2m$ 时，

$$E(f;x)=h^{2m+1}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(\xi)。\tag{5.4}$$

当 $n=2m+1$ 时，

$$E(f;x)=h^{2m+2}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t-m-1)}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi)。\tag{5.5}$$

通常，称上述公式为 Gauss 向前公式。在公式(2.2)中用结点列

$$x_0,\ x_{-1}=x_0-h,\ x_1=x_0+h,\ x_{-2}=x_0-2h,\ x_2=x_0+2h,\ \cdots$$

替代结点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 时，得到的是 Gauss 向后公式：

$$f(x)=f(x_0+th)$$
$$=f_0+t\delta f_{-\frac{1}{2}}+\frac{t(t+1)}{2!}\delta^2 f_0+\frac{t(t^2-1)}{3!}\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t+2)}{4!}\delta^4 f_0+\cdots$$
$$+\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-(m-1)^2)(t+m)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0$$
$$\left(\text{或}+\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{-\frac{1}{2}}\right)+E(f;x)。\quad (5.6)$$

在公式(5.6)中，“或”的意义与(5.3)式中的“或”相同。$E(f;x)$ 是余项，并且当 $n=2m$ 时由(5.4)式给出，而当 $n=2m+1$ 时

$$E(f;x)=h^{2m+2}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t+m+1)}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi)。\quad (5.7)$$

最后顺便指出，由 Gauss 公式已不难引出其它的带有中心差分的插值公式(例如，Stirling 公式，Bessel 公式，Everett 公式，等等)，于此就不一一介绍了。

§6. 逐步线性插值法

设已知列表函数

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

并假定希望近似地估值 $f(\bar{x})$ $(\bar{x}\neq x_i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$。我们可以设想按下列作法实现之：

1. 过点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)作直线$P_1(x)$，计算$P_1(\bar{x})$；

2. 过点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)作二次插值多项式$P_2(x)$，计算$P_2(\bar{x})$并比较$P_2(\bar{x})$与$P_1(\bar{x})$；

3. 过点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)作三次插值多项式$P_3(x)$，计算$P_3(\bar{x})$并比较$P_3(\bar{x})$与$P_2(\bar{x})$；

4. 继续下去，直至相邻的值$P_m(\bar{x})$与$P_{m-1}(\bar{x})$按给定的有效数字重合为止。

下面讨论，如何从值$P_1(\bar{x})$，$P_2(\bar{x})$，…，$P_{m-1}(\bar{x})$计算出值$P_m(\bar{x})$。我们将用$P_{0,1,\cdots,n}(x)$表示$f(x)$的在点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的n次插值多项式。仔细说来，$P_{0,1}(x)$表示过两点(x_0, y_0)、(x_1, y_1)的一次插值多项式；$P_{1,2}(x)$表示过两点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的一次插值多项式；$P_{1,3,5}(x)$表示过点(x_1, y_1)、(x_3, y_3)、(x_5, y_5)的二次插值多项式；余类推。依插值的唯一性，显然有$P_{1,2}(x)=P_{2,1}(x)$，$P_{1,3,5}(x)=P_{3,5,1}(x)$，等等。

定理 4 设$n\geqslant 2$，则

$$P_{0,1,\cdots,n}(x)=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix} P_{0,1,\cdots,n-1}(x) & x_{n-1}-x \\ P_{0,1,\cdots,n-2,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}.$$

【证】 首先，直接可以验证上式右端在$x_0, x_1, \cdots, x_n$处与$f(x)$的值相同。用归纳法可以证明上式右端为次数$\leqslant n$的多项式，再依插值多项式的唯一性可知它一定就是$P_{0,1,\cdots,n}(x)$。证毕。

上述定理有着各种应用。例如，Aitken 迭代插值法就是其中之一。当线性插值不能给出足够的精度时，可以考虑使用较多点的高次插值多项式。定理 4 指出，过点x_0, x_1, x_2的二次插值多项式$P_{0,1,2}(x)$可由线性插值多项式$P_{0,1}(x)$与$P_{0,2}(x)$再经一次线性插值而得到。显然，可以从以下两种形式的任何一种得到同样的结果：

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_1-x \\ P_{0,2}(x) & x_2-x \end{vmatrix},$$

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,2}(x) & x_0-x \\ P_{1,2}(x) & x_1-x \end{vmatrix}。$$

继续照此办理，过 $n+1$ 个点的 n 次插值多项式，可由两个不同的 $n-1$ 次插值多项式（每个均过给定点中的 n 个点）施行线性插值得到。例如，

$$\begin{aligned} P_{0,1,2,3,4,5}(x) &= \frac{1}{x_5-x_4}\begin{vmatrix} P_{0,1,2,3,4}(x) & x_4-x \\ P_{0,1,2,3,5}(x) & x_5-x \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{x_4-x_2}\begin{vmatrix} P_{0,1,2,3,5}(x) & x_2-x \\ P_{0,1,3,4,5}(x) & x_4-x \end{vmatrix}。\end{aligned}$$

Aitken 逐步线性插值法可依照下表进行：

$$\begin{array}{llllll} x_0 & y_0 & & & & x_0-x \\ x_1 & y_1 & P_{0,1}(x) & & & x_1-x \\ x_2 & y_2 & P_{0,2}(x) & P_{0,1,2}(x) & & x_2-x \\ x_2 & y_3 & P_{0,3}(x) & P_{0,1,3}(x) & P_{0,1,2,3}(x) & x_3-x \end{array}$$

这种计算在计算机上用交叉乘法和除法很容易实现，因为分子行列式的各元素出现在阵列里和在行列式里具有相同的相对位置。这是 Aitken 插值法的优点，下面介绍的 Neville 线性插值法就不具备这一优点。

Neville 对于 Aitken 方法作了一些变更。它的基本原理和 Aitken 方法是一样的，但计算步骤作了如下的修改：

$$\begin{array}{llllll} x_0 & y_0 & & & & x_0-x \\ x_1 & y_1 & P_{0,1}(x) & & & x_1-x \\ x_2 & y_2 & P_{1,2}(x) & P_{0,1,2}(x) & & x_2-x \\ x_3 & y_3 & P_{2,3}(x) & P_{1,2,3}(x) & P_{0,1,2,3}(x) & x_3-x \end{array}$$

应该训练如何从 x_i-x 列中正确地选择表列值，因为这

些数并不总是和行列式左边一列所用的数位于这个表的同一行里。例如

$$P_{0,1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix}。$$

例 1 由一个正弦函数表(x 以弧度计，步长为 0.1)，求 sin 4.238 的值。

【解】 依 Aitken 插值法，计算可按下表进行：

x	$\sin x$	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	x_i-x
4.0	−0.75680250						−238
4.1	−0.81827711	−0.90311207					−138
4.2	−0.87157577	−0.89338266	−0.88968553				−38
4.3	−0.91616594	−0.88323083	−0.88939401	−0.88957475			62
4.4	−0.95160207	−0.87270824	−0.88912631	−0.88957928	−0.88957194		162
4.5	−0.97753012	−0.86186885	−0.88888316	−0.88958390	−0.88957191	−0.88957199	262

所求的值(指真值)是 −0.88957200。

例 2 用 Neville 插值法计算例 1 中的 sin 4.238 的值。

x	$\sin x$	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	x_i-x
4.0	−0.75680250						−238
4.1	−0.81827711	−0.90311207					−138
4.2	−0.87157577	−0.89182926	−0.88968553				−38
4.3	−0.91616594	−0.88852003	−0.88954589	−0.88957475			62
4.4	−0.95160207	−0.89410554	−0.88959838	−0.88957003	−0.88957194		162
4.5	−0.97753012	−0.90959863	−0.88942058	−0.88957586	−0.88957204	−0.88957199	262

§7. 插值余项的 Peano 估计

在这一节，我们给出插值余项的 Peano 估计。这些结果是意大利数学家 G. Peano 在 1913 年给出的。

令 $[a, b]$ 是有限区间，$m\geqslant 1$ 是整数。若

$$f(x),\ f^{(1)}(x),\ \cdots,\ f^{(m-1)}(x)$$

在 $[a, b]$ 上连续，而 $f^{(m)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上分段连续且 $|f^{(m)}(x)|\leqslant M_m$，则说函数 $f(x)$ 属于函数类 $W^m(M_m; a, b)$。

例 1 令 $f(x)=|x|$, $[a, b]=[-1, 1]$。容易验证 $f(x)\in W^1(1; -1, 1)$。

例 2 令 $[a, b]=[-1, 1]$ 及

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\geqslant 0, \\ -3x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

则

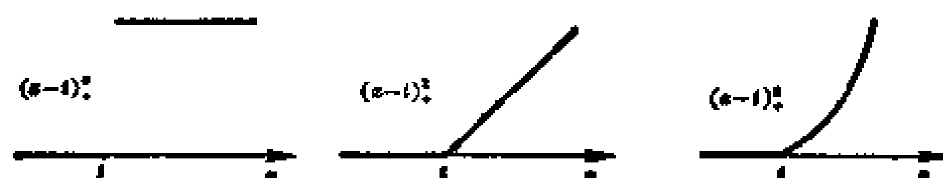
$$f^{(1)}(x)=\begin{cases} 6x, & x\geqslant 0, \\ -6x, & x\leqslant 0; \end{cases} \quad f^{(2)}(x)=\begin{cases} 6, & x>0, \\ -6, & x<0。\end{cases}$$

因此，$f(x)\in W^1(6; -1, 1)$，同时 $f(x)\in W^2(6; -1, 1)$。

令 x 和 t 是实数，$k\geqslant 0$ 是整数。二个变量 x 和 t 的函数 $(x-t)_+^k$ 定义如下：

$$(x-t)_+^k=\begin{cases} (x-t)^k, & x\geqslant t, \\ 0, & x<t。\end{cases} \tag{7.1}$$

若 t 为固定常数，则 $(x-t)_+^k$ 就是 x 的截断多项式。对于 $k=0, 1, 2$，截断多项式的图形如下：



当 x 固定时，$(x-t)_+^k$ 是 t 的函数，请读者绘出它的图形($k=0, 1, 2$)。

我们用 $[a, b]$ 来记包含着点 α, x_0, x_1, $\cdots$, x_n 的最小区间。$E(f; \alpha)$ 仍表插值误差，亦即 $|E(f; \alpha)|=|f(\alpha)-P_n(\alpha)|$，其中 $P_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在结点 x_0, x_1, $\cdots$, x_n 上的 n 次插值多项式。

定理 5 设 m 是正整数 $(1\leqslant m\leqslant n+1)$，则当 $f(x)$ 属于

$W^m(M_m; a, b)$时，存在一个仅依赖于 $m, \alpha, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $K_m(t)$:

$$K_m(t)=\frac{1}{(m-1)!}E((x-t)_+^{m-1};\alpha)$$
$$=\frac{1}{(m-1)!}\left((\alpha-t)_+^{m-1}-\sum_{k=0}^{n}l_k(\alpha)(x_k-t)_+^{m-1}\right), \tag{7.2}$$

使得

$$E(f;\alpha)=\int_a^b K_m(t)f^{(m)}(t)dt。 \tag{7.3}$$

【证】 依假设条件，可以将 $f(x)$ 展成 Taylor 级数：

$$f(x)=Q_{m-1}(x)+R_m(x),$$

其中

$$Q_{m-1}(x)=f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a),$$
$$R_m(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b(x-t)_+^{m-1}f^{(m)}(t)dt。$$

显然，

$$E(f;\alpha)=E(Q_{m-1}+R_m;\alpha)=E(Q_{m-1};\alpha)+E(R_m;\alpha)。$$

由于当 $f(x)$ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式时插值是精确的，所以 $E(Q_{m-1};\alpha)=0$，并因此

$$E(f;\alpha)=E(R_m;\alpha)。 \tag{7.4}$$

现在，我们写出 $E(R_m;\alpha)$：

$$E(R_m;\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b(\alpha-t)_+^{m-1}f^{(m)}(t)dt$$
$$-\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{n}l_k(\alpha)\int_a^b(x_k-t)_+^{m-1}f^{(m)}(t)dt。$$

把上式中的积分合并，并依公式(7.2)和(7.4)，即得(7.3)。证毕。

定理5也称为关于插值公式的核定理。函数 $K_m(t)$ 称为

Peano 核。显然，$K_m(t)$ 只依赖于 $m, \alpha, x_0, x_1, \cdots, x_n$，不依赖于 $f(x)$。

利用方程(7.3)，可以估计插值误差的界，结果之一是下面的

定理6 设 m 是一正整数 $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$，$f(x) \in W^m(M_m; a, b)$，则

$$|E(f; \alpha)| \leqslant e_m M_m, \tag{7.5}$$

其中

$$e_m = \int_a^b |K_m(t)| dt。 \tag{7.6}$$

【证】 由于 $f(x) \in W^m(M_m; a, b)$，所以

$$|E(f; \alpha)| = \left|\int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt\right| \leqslant \int_a^b |K_m(t)| |f^{(m)}(t)| dt$$

$$\leqslant \int_a^b |K_m(t)| M_m dt = M_m e_m。$$

证毕。

自然会问，估计式(7.5)中的常数 e_m 能不能用较小的常数代替？结论由下面的定理给出。

定理7 设 m 是一正整数$(1 \leqslant m \leqslant n+1)$，$e_m$ 由公式(7.6)给出，则有函数 $f_0(x) \in W^m(M_m; a, b)$ 使得

$$|E(f_0; \alpha)| = e_m M_m。$$

【证】 令

$$f_0^{(m)}(x) = \begin{cases} M_m, & \text{当 } K_m(x) \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -M_m, & \text{当 } K_m(x) < 0 \text{ 时}。 \end{cases} \tag{7.7}$$

于是，通过对 $f_0^{(m)}(x)$ 的 m 次不定积分运算，即可求出 $f_0(x)$（自然，它含有 m 个任意的积分常数）。依(7.7)式，

$$K_m(t) f_0^{(m)}(t) = |K_m(t) f_0^{(m)}(t)| = M_m |K_m(t)|,$$

从而

$$|E(f_0; \alpha)| = \left|\int_a^b K_m(t) f_0^{(m)}(t) dt\right|$$

$$= M_m \int_a^b |K_m(t)| dt = e_m M_m。$$

证毕。

在§3，我们得到(见公式(3.4))

$$|E(f;\alpha)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\cdots(\alpha-x_n)|。$$

这个估计与(7.5)式的估计是一致的(取 $m=n+1$)。

定理8 由(3.4)式与(7.5)式给出的插值误差的界是恒等的，换言之

$$\int_a^b|K_{n+1}(t)|dt=\frac{1}{(n+1)!}|(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\cdots(\alpha-x_n)|。\tag{7.8}$$

这个定理的证明基于以下三个引理。

引理1 当 $1\leqslant m<n+1$ 时，核函数 $K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上至少改变一次符号。

【证】 考虑多项式 $Q_m(x)=x^m/m!$。若 $m<n+1$，则 $E(Q_m;\alpha)=0$。但是

$$E(Q_m;\alpha)=\int_a^b K_m(t)\,Q_m^{(m)}(t)dt=\int_a^b K_m(t)dt,$$

从而

$$\int_a^b K_m(t)dt=0,$$

并因此 $K_m(t)$ 至少在 $[a, b]$ 上改变一次符号。证毕。

引理2 如果 $K_{m-1}(t)$ 在 $[a, b]$ 上改变 k 次符号，则 $K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上最多改变 $k-1$ 次符号。

【证】 依(7.2)式，

$$K_m(a)=K_m(b)=0\quad(m=2, \cdots, n+1)。$$

另一方面，不难看出 $K_m(t)$ 是 $K_{m-1}(t)$ 的不定积分(取负号)。由此推出，若 $K_{m-1}(t)$ 在 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ $(a<t_1<t_2<\cdots<t_k<b)$ 处改变符号，则 $K_m(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ $(i=1, 2, \cdots, k-1)$ 上最多改变一次符号。

引理3 当 $1\leqslant m\leqslant n+1$ 时，$K_m(t)$ 在 $[a, b]$ 上恰好改变 $n-m+1$ 次符号（从而，$K_{n+1}(t)$ 在 $[a, b]$ 上不变号）。

【证】 我们知道，$K_m(t)$ 是 $m-1$ 阶的分段多项式，特别，$K_1(t)$ 按段是常数。$K_1(t)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \alpha$ 处有跳跃。因为这些点中有两个是 $[a, b]$ 的二端点，所以 $K_1(t)$ 的符号在 $[a, b]$ 上最多改变 n 次。如果 $K_1(t)$ 的变号次数小于 n，或者如果对于任何 $m\leqslant n-1$，$K_m(t)$ 的变号次数小于 $n-m+1$，则依引理2，$K_n(t)$ 不变号。但是，依引理1这是不可能的，于是 $K_m(t)$ 恰好改变符号 $n-m+1$ 次。

【定理8的证明】 考虑函数 $Q_{n+1}(x)=x^{n+1}/(n+1)!$。由于 $Q_{n+1}^{(n+1)}(x)=1$，所以

$$|E(Q_{n+1};\ \alpha)|=\frac{1}{(n+1)!}|(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\cdots(\alpha-x_n)|。\tag{7.9}$$

但是，依(7.3)式又有

$$|E(Q_{n+1};\alpha)|=\left|\int_a^b K_{n+1}(t)\,dt\right|。\tag{7.10}$$

由于 $K_{n+1}(t)$ 不变号，故

$$\left|\int_a^b K_{n+1}(t)dt\right|=\int_a^b|K_{n+1}(t)|dt。\tag{7.11}$$

联合(7.9)，(7.10)和(7.11)式，即得(7.8)式。证毕。

§8. 插值序列的收敛性

设对给定的函数 $f(x)$，我们有一插值多项式序列：

$$P_2(x),\ P_3(x),\ \cdots,\ P_{n-1}(x),\ \cdots,$$

此处

$P_2(x)$ 是在点 $x_{1,3},\ x_{2,3},\ x_{3,3}$ 处的插值多项式，

$P_3(x)$ 是在点 $x_{1,4},\ x_{2,4},\ x_{3,4},\ x_{4,4}$ 处的插值多项式，

……………………………………………………

$P_{n-1}(x)$是在点$x_{1,n}$, $x_{2,n}$, $\cdots$, $x_{n,n}$处的插值多项式,

……………………………………………………

我们还设所有的点$x_{1,n}$, $x_{2,n}$, $\cdots$, $x_{n,n}$($n=3, 4, \cdots$)均属于有限区间$[a, b]$,并且α是$[a, b]$中的一点。点α可以是也可以不是$x_{k,n}$($k=1, 2, \cdots, n$)。

我们考虑以下二个问题:

问题1. 在怎样的条件下

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha)=f(\alpha), \quad \alpha\in[a, b],$$

特别,上式总是对的吗?

问题2. 在怎样的条件下,插值序列$P_n(x)$($n=3, 4, \cdots$)一致收敛于$f(x)$?

由于这些问题的解答过于复杂,所以我们只是陈述某些特殊的结论,用来说明什么样的结果是已知的。

令$f(x)=|x|$,且$[a, b]=[-1, 1]$。假定利用下列等间隔点来构造插值多项式:

$x_{1,3}=-1$, $x_{2,3}=0$, $x_{3,3}=1$;

$x_{1,4}=-1$, $x_{2,4}=-\frac{1}{3}$, $x_{3,4}=\frac{1}{3}$, $x_{4,4}=1$;

$x_{1,5}=-1$, $x_{2,5}=-\frac{1}{2}$, $x_{3,5}=0$, $x_{4,5}=\frac{1}{2}$, $x_{5,5}=1$;

……………………………………………………

1912年Бернштейн证明了下面的定理:

定理9 令$f(x)=|x|$,并利用上述诸点构造插值多项式。如果$\alpha\neq-1$, 0或1,则$P_{n-1}(\alpha)$不收敛于$f(\alpha)$。

我们可以想到,插值序列不收敛的原因在于$f(x)=|x|$没有连续的导数。

是不是可以通过巧妙地选择插值结点$x_{k,n}$($k=1, 2, \cdots,$

n; $n=3, 4, \cdots$)即可使插值过程收敛呢？ Бернштейн 于1914年证明这是不对的。

定理 10 假定插值结点 $x_{k,n}(k=1, 2, \cdots, n; n=3, 4, \cdots)$ 均属于有限区间$[a, b]$，并且是预先给定的。则存在一在此区间上连续的函数 $f(x)$，相应的插值多项式序列并不一致收敛于 $f(x)$。

现在让我们指出插值序列能够收敛的几种情况。

若函数 $f(x)$ 对一切 x 均可以展成收敛的幂级数：

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

则称它为*整函数*。例如，函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ 均是整函数。

定理 11 令 $f(x)$ 是整函数，点 $x_{k,n}$ $(k=1, 2, \cdots, n; n=3, 4, \cdots)$ 是任何属于有限区间$[a, b]$的点集(假定 $x_{1,n}$, $x_{2,n}$, $\cdots$, $x_{n,n}$ 是不同的)。则插值多项式序列在$[a, b]$上一致收敛于 $f(x)$ (证明见 Березин 和 Жидков 的书«Методы вычислений», том I, Моск., 1965, 123 页)。

定理 12 设 $f(x)$ 在$[-1, 1]$上有连续的二阶导数，又设插值结点取为

$$x_{k,n}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

则当 $n\to\infty$ 时，插值多项式 $P_{n-1}(x)$ 在$[-1, 1]$上一致收敛于 $f(x)$，并且

$$f(x)-P_{n-1}(x)=O(n^{-\frac{1}{2}})$$

(证明见 E. Isaacson 和 H. B. Keller 的书 The Analysis of Numerical Methods, Wiley, New York, 1966, 236 页)。

1956 年, В. И. Крылов 证明了以下两个定理：

定理 13 令 $f(x)$ 定义在 $(-1, 1)$上，$P_{n-1}(x)$ 表 $f(x)$

的 Lagrange 插值多项式，其中插值结点为 n 次 Чебышев 多项式的零点。若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上绝对连续，则当 $n\to\infty$ 时，$P_{n-1}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 14 条件同定理 13，另设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为有界变差，则当 $n\to\infty$ 时，$P_{n-1}(x)$ 在 $f(x)$ 的全体连续点处收敛于 $f(x)$。

以上定理的证明请见《苏联科学院报》(ДАН СССР, **107** (1956), 362～365)。

即使当 n 变大时，n 个结点的插值多项式 $P_{n-1}(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$，在计算实践中插值方法还是有用的。对于大的 n 而 $P_{n-1}(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的情形，常常是对于小的 n 来说误差 $|f(x)-P_{n-1}(x)|$ 下降到某一程度。在 n 的这一范围内，可以指望得到精确到一定的有效位数的近似值。通常，我们并不使用高次插值多项式。

关于插值方法的论述，比较全面的书是 P. J. Davis 的《插值与逼近》(Interpolation and Approximation, Blaisdell, Waltham, Mass., 1963)。

第一章习题

1. 设已给定 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，且当 $i\neq j$ 时 $x_i\neq x_j$ $(i, j=0, 1, \cdots, n)$。试证明 Vandermonde 行列式

$$W(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

的值恒不为零。

[提示] 用 x 替换 x_n，并将上述行列式按最后一列展开。考虑所

得的 n 次多项式，它的最高次项系数为 $W(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$，它的根是 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$。故得 $W(x_0, x_1, \cdots, x_n)=W(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\times(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$。重复上述过程即得所要求的结论。

2. 利用上题结论，证明插值问题有唯一解。

3. 已知函数 $y=(1+x^2)^{-1}$，试写出它在结点组 $-1, 0, 1$ 和 $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ 上的插值多项式。

4. 若 $f(x)=x^6+x^3+3$，问

$$f(2^0, 2^1, \cdots, 2^6)=?$$
$$f(2^0, 2^1, \cdots, 2^7)=?$$

5. 利用差分性质证明

$$f(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2。$$

[提示] 考虑差分 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$，并利用差分的性质6。

6. 设已知

$$f(1)=-1491,\quad f(2)=-575,\quad f(3)=661,\quad f(4)=2265。$$

用 Aitken 插值法计算 $f(2.5)$。

7. 一个由 $x=0$ 到 $x=1$ 的步长 0.01 的 e^x 表，它的线性插值的最大误差是多少？

8. 证明，对任意非负整数 k，有

$$x_+^k+(-1)^k(-x)_+^k=x^k。$$

9. 设 $f(x)\in W^m(M_m; a, b)$，$m\geqslant 1$，又设 $a\leqslant x\leqslant b$，则函数 $f(x)$ 有如下的 Taylor 展式：

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)(x-a)^{m-1}+R_m(x),$$

其中 $R_m(x)$ 为展开余项。试证明

$$R_m(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b(x-t)_+^{m-1}f^{(m)}(t)dt。$$

10. 证明 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\equiv 1$，并求 $\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)\quad(0\leqslant k\leqslant n)$。

11. 证明 $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\leqslant n!\,(h^{n+1}/4)$，其中 $h=$

$\max(x_{i+1}-x_i)$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$。

12．在结点间，插值多项式发生振荡状的激烈变化是拉格朗日插值的缺点。说明这意味着什么，并作图加以解释。

第二章 一致逼近

在这一章我们介绍俄罗斯学者 Чебышев 提出的最佳一致逼近的理论。

§1. Weierstrass 的第一定理

大家知道，在全部实变数函数的数学分析中，居于最重要地位的函数类是连续函数类 $C[a, b]$ 与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$。

$C[a, b]$ 是定义在某一闭区间 $[a, b]$ 上的一切连续实函数所成的集合；$C_{2\pi}$ 是定义在整个实轴 $(-\infty, \infty)$ 上的一切具有 2π 周期的连续实函数的集合。

现在我们来叙述逼近论中第一条基本定理。

定理 1(Weierstrass, 1885)　设 $f(x)\in[a, b]$，那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在这样的多项式 $P(x)$，使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

关于这个著名定理，现在已有好多个不同的证法，其中公认为最优美的是属于 Бернштейн 的。下面就来介绍这个证法。

【Бернштейн 的证法】　我们不妨开始就假定函数的定义区间是 $[a, b]=[0, 1]$。事实上，通过如下的线性代换：

$$t=(b-a)x+a$$

就能将 x 的区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 变换成 t 的区间 $a\leqslant t\leqslant b$。同时，显而易见，x 的多项式将变成 t 的多项式，x 的连续函数将变成 t 的连续函数。这样，我们只要就连续函数类 $C[0, 1]$ 来证

明 Weierstrass 的定理就行了。

对于给定的 $f(x)\in C[0, 1]$，作如下的一串多项式 ($n=1, 2, \cdots$)：

$$B_n^f(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \qquad (1.1)$$

显然 $B_n^f(x)$ 是一个 n 次多项式。

下面我们要证明极限关系式

$$\lim_{n\to\infty}B_n^f(x)=f(x)$$

在区间 $[0, 1]$ 上是一致成立的。显然这个命题隐含着 Weierstrass 的第一定理。因为对于任意指定的 $\varepsilon>0$，根据所要证明的命题，总可找到一个充分大的 N，使得于 $n\geqslant N$ 时恒有

$$\max_x|B_n^f(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

换句话说，Weierstrass 定理中所主张的 $P(x)$，只要取 $B_n^f(x)$（其中 $n\geqslant N$）就可以了。

为了证明上述命题，需要用到一个初等恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)。 \qquad (1.2)$$

这个恒等式是容易验证的。事实上，由于

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\equiv 1,$$

可知

$$\text{左端}=\sum_{k=0}^{n}(n^2x^2+k^2-2nkx)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+(1-2nx)\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n^2x^2+n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+(1-2nx)nx$$

$$=n^2x^2+n(n-1)x^2+(1-2nx)nx=\text{右端}。$$

对于[0, 1]中的每一固定 x 及任一固定正整数 n，令

$$e_n(x)=\max\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|,$$

上式的右端代表当 k 取所有合乎条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4}$$

的正整数时所得的最大差数。根据 $f(x)$ 在[0,1]上的一致连续性，可见必存在一串 $e_n>0$，使得

$$e_n(x)<e_n\downarrow 0\quad(n\to\infty)。$$

记 $$f(x)-B_n^f(x)=\sum{}'\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}(x)$$

$$+\sum{}''\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}(x),$$

其中 $\sum'$ 与 $\sum''$ 分别表示按照如下的条件：

$$|k-nx|\leqslant n^{3/4},\qquad |k-nx|>n^{3/4}$$

对一切 k 取和；又

$$\lambda_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}。$$

令 $M=\max|f(x)|$，则显然有

$$|f(x)-B_n^f(x)|<\sum{}'e_n\lambda_{n,k}(x)+2M\sum{}''\lambda_{n,k}(x)$$

$$<e_n+2M\sum{}''\lambda_{n,k}(x),$$

而且利用已经验证过的恒等式(1.2)可知

$$n^{3/2}\sum{}''\lambda_{n,k}(x)<\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\lambda_{n,k}(x)=nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}。$$

因此，
$$\sum{}''\lambda_{n,k}(x) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2},$$
$$|f(x)-B_n^f(x)| < \varepsilon_n+\frac{M}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}。$$
注意上列不等式的右端与 x 无关，而且随着 n 的无限增大而趋于 0。这就证明了多项式序列 $B_n^f(x)$ 对于 $f(x)$ 的一致收敛性。

注记 1 Weierstrass的第一定理实际上正好解决了如何利用多项式作成的函数项级数来表示连续函数的问题。因为，任意取定一个单调下降于 0 的数列 δ_n，则对每个 δ_n 都可找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x)-f(x)|<\delta_n$。于是令
$$Q_1(x)=P_1(x),\ Q_n(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x),\quad n>1,$$
可知级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$$
的第 n 部分和恰好与 $P_n(x)$ 相合，因而该级数也就一致地收敛于 $f(x)$。

注记 2 在 Бернштейн 的证法中，显然不仅证明了近似多项式序列 $P_n(x)$ 的存在性，而且还给出了构造 $P_n(x)$ 的一个具体方法。事实上，$B_n^f(x)\,(n=1, 2, \cdots)$ 便构成连续函数 $f(x)\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的一个近似多项式序列。这样的证法通常称之为构造性的证明方法，它要比一般数学上所说的纯粹存在性的证明更有价值。此外，还值得提到的是，Бернштейн 多项式 $B_n^f(x)$ 在矩量问题和计算几何学中也有其应用。

注记 3 考虑 Weierstrass 定理的构造性证法之前，E. Borel 曾提出过这样的问题：作这样的多项式 $P_{k,n}(x)$，使得对于多项式
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P_{k,n}(x)$$

和对于任一个在[0, 1]上连续的函数$f(x)$，就每一个充分大的n来说，不等式

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$$

在[0, 1]上都成立(其中ε是预先任意指定的正数)。Borel 曾经自己解决了这个问题。但若按照他自己的论证手续去寻找$P_{k,n}(x)$的表达式，那是颇为复杂而烦难的。现在，根据 Бернштейн 多项式的结构形式，只需取

$$P_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

也就圆满地解决了上面所说的问题。故 Бернштейн 的证法还巧妙地回答了 Borel 问题(详情可参考 Н. Н. Лузин 著《实变函数论》§ 63)。

注记 4 关于 Weierstrass 定理(定理 1 和 § 6 的定理 5)的各种其它证法是分别由 Lebesgue, Landau, Vallée-Poussin, Fejér, Stone 等人提供的*)。可以从 В. Л. Гончаров 的经典著作《函数的插值与逼近理论》一书中找到一部分证法。

§ 2. Borel 存在定理

定理 1 告诉我们：凡$C[a, b]$类中的任何函数都可以用多项式近似地表示并具有预先任意指定的精确度。然而，这时近似多项式的次数却可能很高。因此自然要问，如果预先对近似多项式的次数加以限制，则近似多项式将能达到怎样的最高精度？为讨论这个问题，需要引进一系列的重要概念。

*) 部分证法请见第四章 § 4。

以后我们总用 H_n 表示次数不高于 n 的那些实系数多项式的集合，即形如

$$P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

的多项式的集合。其中诸高次项的系数 c_n 与 c_{n-1} 等也可以是 0，因此显然有 $H_0\subset H_1\subset H_2\subset\cdots$。

设 $f(x)\in C[a, b]$，$P(x)\in H_n$，则数值

$$\Delta(P)=\max_{a\leq x\leq b}|P(x)-f(x)|$$

便称为 $P(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差；而偏差的下确界

$$E_n=E_n(f)=\inf_{P\in H_n}\{\Delta(P)\}$$

便叫 H_n 对给定函数 $f(x)$ 的最小偏差，又称为 H_n 中之多项式对 $f(x)$ 的最佳逼近。

自然人们会想到去问：H_n 中是否总存在这样的多项式 $P(x)$ 使得 $\Delta(P)=$ 最小偏差 E_n? 往下我们讲到 Borel 的一个定理时，就知道问题的答案是肯定的，即最小偏差是能够达到的。

不难看出 $E_n\geqslant 0$，$E_0\geqslant E_1\geqslant E_2\geqslant\cdots$。又根据 Weierstrass 第一定理，可知 $E_n\to 0(n\to\infty)$。现在我们就来论证：

定理 2(Borel, 1905) 对于任何 $f(x)\in C[a, b]$，集合 H_n 中总存在这样的多项式 $P(x)$ 使得

$$\Delta(P)=E_n。$$

在正式进入这个定理的证明之前，先提醒读者回忆一下这样两个极其简单而重要的事实：(一)凡定义在有界闭区域上的多元连续函数至少必在区域内的一点处达到最小值，(二)如果一个多项式在闭区间 $[a, b]$ 上处处取零值，则该多项式必恒等于零(亦即各项系数都是零)。

为了简化证明中的叙述形成，给 $C[a, b]$ 中的每个函数

规定一个广义绝对值(或范数)。即若 $f(x)\in C[a,b]$,则称

$$\|f\|=\|f(x)\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)| \tag{2.1}$$

为 $f(x)$ 的广义绝对值。不难看出这种绝对值(范数)有与通常绝对值完全相似的性质。例如,当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时才能有 $\|f\|=0$;若 $g(x)$ 为 $C[a,b]$ 中任一函数,则 $\|f\|\leqslant\|f-g\|+\|g\|$,以及由移项可知有

$$|\|f\|-\|g\||\leqslant\|f-g\| \quad (\text{范数不等式})。\tag{2.2}$$

借助范数符号可知有如下的

Borel 定理的另外叙述 对于任何 $f(x)\in C[a,b]$,集合 H_n 中总存在多项式 $P_0(x)=c_0^*+c_1^*x+\cdots+c_n^*x^n$,使得

$$\begin{aligned}&\|f(x)-c_0^*-c_1^*x-\cdots-c_n^*x^n\|\\&=\inf_{P\in H_n}\|f(x)-c_0-c_1x-\cdots-c_nx^n\|。\end{aligned}$$

显然可把

$$\varphi(c_0,c_1,\cdots,c_n)=\|f(x)-c_0-c_1x-\cdots-c_nx^n\|$$

看作变数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 的多元函数。当 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 各自取尽一切实数时,亦即相当于 $P(x)$ 走遍整个集合 H_n。因此 Borel 定理的意思等于是说存在有限值 $c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*$ 使得函数 φ 达到最小值:

$$\varphi(c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*)=\inf\varphi(c_0,c_1,\cdots,c_n)。$$

下面我们要从 φ 的连续性出发来论证这一点。

【定理 2 的证明】 先验证 φ 是诸变元的连续函数。事实上,利用范数的定义(2.1)易知

$$\begin{aligned}&|\varphi(c_0,c_1,\cdots,c_n)-\varphi(c_0',c_1',\cdots,c_n')|\\&\leqslant\|(f(x)-c_0-c_1x-\cdots-c_nx^n)-(f(x)-c_0'\\&\quad-c_1'x-\cdots-c_n'x^n)\|\\&\leqslant|c_0'-c_0|+|c_1'-c_1|\cdot\|x\|+\cdots+|c_n'-c_n|\cdot\|x^n\|\end{aligned}$$

$$\leqslant |c_0'-c_0|+|c_1'-c_1|\cdot M+\cdots+|c_n'-c_n|\cdot M^n,$$

其中 M 为 $|x|$ 在 $[a, b]$ 上的上界。因此，当 $c_k \to c_k'$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ 时，也就有 $\varphi(c_0, c_1, \cdots, c_n) \to \varphi(c_0', c_1', \cdots, c_n')$。完全类似地，可知

$$\psi(c_0, c_1, \cdots, c_n)=\|c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\|$$

也是诸变元的连续函数。

其次再验证 φ 的最小值(或下确界)的位置决不会在无穷远处。事实上，可证明

$$\psi(c_0, c_1, \cdots, c_n) \to +\infty, \text{ 当 } \sum_0^n c_k^2 \to +\infty \text{ 时。}$$

令 (S)：$\sum\limits_0^n c_k^2=1$ 代表 $n+1$ 维欧氏空间中的闭球面。则连续函数 ψ 自然会在这闭球面上达到它的最小值 μ：

$$\min_{(S)} \psi(c_0, c_1, \cdots, c_n)=\mu>0。$$

这里的 μ 为什么不能等于零呢？这是因为假如

$$\psi=\|c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\|=0,$$

就必然是 $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$。亦即只有在球面 (S) 的中心才可能取零值，面在球面上既然诸 c_k 不全为零，故 ψ 的值必永远大于零。现在再利用一下范数不等式 (2.2)，得知 (当 $\sum\limits_0^n c_k^2 \to \infty$ 时)：

$$\begin{aligned}
&\varphi(c_0, c_1, \cdots, c_n)\\
&\quad \geqslant \|c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\|-\|f(x)\|\\
&\quad =\sqrt{\sum_0^n c_k^2}\left\|\frac{c_0}{\sqrt{\sum c_k^2}}+\frac{c_1x}{\sqrt{\sum c_k^2}}+\cdots+\frac{c_nx^n}{\sqrt{\sum c_k^2}}\right\|-\|f(x)\|\\
&\quad \geqslant \sqrt{\sum_0^n c_k^2}\cdot\mu-\|f\| \to +\infty。
\end{aligned}$$

既如上述，就有充分大的数 $\gamma>0$ 存在，使当 $\sum\limits_0^n c_k^2>\gamma^2$

时，保证有 $\varphi(c_0, c_1, \cdots, c_n) > \|f\|$。另一方面，在闭球域 $\sum_0^n c_k^2 \leqslant \gamma^2$ 内，连续函数 φ 自然会在某点 $(c_0^*, c_1^*, \cdots, c_n^*)$ 处达到其最小值(且决不比 $\|f\|$ 为大)：

$$\min \varphi(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \varphi(c_0^*, c_1^*, \cdots, c_n^*)$$
$$\leqslant \varphi(0, \cdots, 0) = \|f\|。$$

在球外既然 φ 恒大于 $\|f\|$，因此可见 $\varphi(c_0^*, c_1^*, \cdots, c_n^*)$ 还必定是在那整个 $n+1$ 维空间中的最小值。这就完成了定理 2 的证明。

在 Borel 定理中，所肯定存在的那个满足条件 $\Delta(P) = E_n$ 的 n 次多项式 $P(x)$，称为函数 $f(x)$ 的*最小偏差多项式*或*最佳逼近多项式*。这种多项式究竟具有那样的特征以及是否唯一存在等问题，应该说比 Weierstrass 逼近定理或 Borel 的存在定理所要回答的问题更进了一步，然而却远在逼近定理发现之前 30 年，就已由 Чебышев 所全部解决了。Чебышев 之所以未能去完成逼近定理的发现，主要是由于当时没有注意到考虑 $E_n \to 0 (n \to \infty)$ 的问题。同时在 Чебышев 当初看来，最佳逼近多项式的存在似乎是毫无疑问的(从而是无需证明的)，因此直到他死了十年以后(1905 年)，才由 Borel 补充建立了上述的存在定理。这显然是符合从感性到理性的认识发展规律的。

§ 3. Чебышев 定理

本节介绍 Чебышев 所发现的两个重要定理。

设给定一个函数 $f(x) \in C[a, b]$。又设 $P(x)$ 是 $f(x)$ 在 H_n 类中的一个最佳逼近多项式，亦即

$$\|P(x) - f(x)\| = E_n。$$

如果 $E_n=0$, 那么这表示 $f(x)$ 是一个次数不高于 n 的多项式。除了这种显而易见的情况不予考虑之外，我们一般总是假定 $E_n>0$。

因为连续函数 $|P(x)-f(x)|$ 在闭区间 $[a, b]$ 上总能达到最大值，所以至少会有一点 x_0 使得

$$|P(x_0)-f(x_0)|=E_n。$$

我们就把任何这样的点称为 $P(x)$ 的偏离点——简称 (e) 点，并且根据不同情况

$$P(x_0)-f(x_0)=E_n \quad 或 \quad P(x_0)-f(x_0)=-E_n$$

而分别称呼这种 (e) 点为 $(+)$ 点或 $(-)$ 点（亦可称为 $P(x)$ 对 $f(x)$ 的正偏离点或负偏离点）。

容易证明，$(+)$ 点和 $(-)$ 点都是存在的。例如，要是假定最佳逼近多项式 $P(x)$ 没有 $(-)$ 点，则此时对于 $[a, b]$ 的一切 x，都有

$$P(x)-f(x)>-E_n。$$

从而连续函数 $P(x)-f(x)$ 的最小值也必大于 $-E_n$。可记 $\min(P(x)-f(x))=-E_n+2h,\ h>0$。这时对于 $[a, b]$ 中的一切 x，都有

$$-E_n+2h\leqslant P(x)-f(x)\leqslant E_n,$$

$$E_n+h\leqslant[P(x)-h]-f(x)\leqslant E_n-h。$$

亦即有 $$|[P(x)-h]-f(x)|\leqslant E_n-h。$$

但这表示 n 次多项式 $P(x)-h$ 与 $f(x)$ 的偏差小于 E_n，显然这是与 E_n 的定义相矛盾的。同理，要是假定 $P(x)$ 没有 $(+)$ 点，那也会导出矛盾。

现在我们来逐步论证下面的 Чебышев 基本定理。

定理 8（Чебышев,1859） H_n 中的一个多项式 $P(x)$ 成为 $C[a, b]$ 中某给定函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式之充分必要条

件是，$|P(x)-f(x)|$ 在闭区间 $[a, b]$ 的不少于 $n+2$ 个点处达到其绝对极大值，而且这些点依次为正偏离点和负偏离点。

【证】 充分性部分。假定 $|P_0(x)-f(x)|$ 满足了定理的条件，我们要去验证 $P_0(x)$ 必定是最佳逼近多项式。令

$$A=\max_{a\le x\le b}|P_0(x)-f(x)|。$$

根据假设，$[a, b]$ 上存在点组(所谓交错组)

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2},$$

使得 $|P_0(x_i)-f(x_i)|=A(i=1, 2, \cdots, n+2)$；而且在这组点上函数差 $P_0(x)-f(x)$ 依次变号。要证明 $P_0(x)$ 是最佳逼近多项式，只需证明 $A=E_n=E_n(f)$ 就可以了。

注意 $A=\Delta(P_0)\geqslant E_n$，所以若是采用归谬证法，则可假设

$$A>E_n。$$

用 $P(x)$ 表示对 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，并写出

$$P_0(x_i)-P(x_i)=[P_0(x_i)-f(x_i)]-[P(x_i)-f(x_i)]。$$

注意其中 $|P(x_i)-f(x_i)|\leqslant E_n<A$，可见

$$P_0(x_i)-P(x_i) 与 P_0(x_i)-f(x_i)$$

两者的符号必相同。从而 $P_0(x)-P(x)$ 也在点组上依次变号。因此 $P_0(x)-P(x)$ 在各子区间

$$(x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \cdots,\ (x_{n+1}, x_{n+2})$$

内都有零点，亦即共有 $n+1$ 个零点，但 $P_0(x)-P(x)$ 明明是次数不高于 n 的多项式，唯一可能是 $P_0(x)-P(x)\equiv0$。这样一来，所得结果 $\Delta(P_0)=\Delta(P)$ 便与原设

$$\Delta(P_0)=A>E_n=\Delta(P)$$

相矛盾。由此矛盾便我们断定 $A=E_n$ 为真。

必要性部分。设已知 $P(x)$ 是最佳逼近多项式，我们要去证明 $[a, b]$ 上必存在如下的点组，

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2},$$

它们依次成为(+)点和(−)点。让我们用点组

$$u_0 = a < u_1 < u_2 < \cdots < u_s = b$$

把$[a, b]$分成如此小的子区间$[u_k, u_{k+1}]$，使得连续函数$P(x) - f(x)$在每个子区间上的振幅都小于$\frac{1}{2}E_n$，若$[u_k, u_{k+1}]$至少含有一个(e)点，便称它做(e)区间。自然，$P(x) - f(x)$在(e)区间上不能为零，因而必保持定号。所以我们总可以把一切(e)区间分成两类，一类是(+)区间，在其上差数$P(x) - f(x)$总是正的；另一类是(−)区间，在其上$P(x) - f(x)$总是负的。

再把所有的(e)区间依从左到右的顺序编号排列成：$d_1, d_2, \cdots, d_N$。为了确定起见，无妨设d_1为(+)区间。一般说来，可把诸d_i依下列格式分成若干组：

(+)区间 $d_1, d_2, \cdots, d_{k_1}$;

(−)区间 $d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \cdots, d_{k_2}$;

……………………………………

$(-1)^{m-1}$区间 $d_{k_{m-1}+1}, d_{k_{m-1}+2}, \cdots, d_{k_m}$。

上面的每一组中都至少含有一个(e)区间，因此为了完成定理的证明，只须证明

$$m \geqslant n+2$$

就可以了。

以下采用归谬证法。假定$m < n+2$。由于函数差$P(x) - f(x)$在闭区间d_{k_1}和d_{k_1+1}上的符号相反，故d_{k_1}的右端点不能与d_{k_1+1}的左端点重合。因此总可以在d_{k_1}之右与d_{k_1+1}之左选取一点α_1，不妨采用顺序关系符号表示为

$$d_{k_1} < \alpha_1 < d_{k_1+1}。$$

同理,可取这样的一些点 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-1}$, 而使

$$d_{k_2} < \alpha_2 < d_{k_2+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{k_{m-1}} < \alpha_{m-1} < d_{k_{m-1}+1}。$$

现在我们作 $m-1$ 次多项式 $\rho(x)=(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\cdots\cdot(\alpha_{m-1}-x)$。由假定已知 $m-1\leqslant n$, 故 $\rho(x)\in H_n$。既然 $\rho(x)$ 除开诸 α_i 点之外别无其它零点, 因此 $\rho(x)$ 在各组 d_k 区间上恒保持定号,并且还和各组区间的(e)点符号相同。亦即在所有(e)区间上 $\rho(x)$ 与 $P(x)-f(x)$ 符号相同。

设 $[u_i, u_{i+1}]$ 是原分划中的任一区间, 如果它并非(e)区间,则自然是

$$\max_{u_i\leqslant x\leqslant u_{i+1}} |P(x)-f(x)| < E_n。$$

令 E^* 表示所有非(e)区间上的那些 $\max|P(x)-f(x)|$ 中的最大值,则自然是 $E^*<E_n$。

为了完成归谬证法,亦即为了导出所期望的矛盾,可设法造出 H_n 中的另一多项式

$$Q(x)=P(x)-\varepsilon\rho(x),$$

使其与 $f(x)$ 的偏差竟小于下确界 E_n(自然这就是矛盾了)。为此目的,只需选一个合于如下条件的小正数 ε 即可:

$$\varepsilon\|\rho(x)\| < E_n-E^*,\quad \varepsilon\|\rho(x)\| < \frac{1}{2}E_n。$$

这样,我们确定 $Q(x)$ 之后,便可验证 $\Delta(Q)<E_n$。事实上,当 x 不属于(e)区间时,则

$$\begin{aligned}|Q(x)-f(x)| &\leqslant |P(x)-f(x)|+\varepsilon|\rho(x)|\\ &\leqslant E^*+\varepsilon\|\rho(x)\| < E_n;\end{aligned}$$

又当 x 属于某一(e)区间 d_k 时,则由于 $\varepsilon\rho(x)$ 和函数差 $P(x)-f(x)$ 同号,且

$$|P(x)-f(x)|>\frac{1}{2}E_n>\varepsilon\|\rho(x)\|,$$

故得
$$\begin{aligned}|Q(x)-f(x)|&=|P(x)-f(x)-\varepsilon\rho(x)|\\&=|P(x)-f(x)|-\varepsilon|\rho(x)|\\&\leqslant E_n-\varepsilon|\rho(x)|<E_n。\end{aligned}$$

故已验证对$[a, b]$中的一切x都有$|Q(x)-f(x)|<E_n$。如此便已获得所期望的矛盾$\Delta(Q)<E_n$。定理至此便完全证明。

基本定理中所说的点组$x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$通常称为Чебышев交错组。定理的主要意思实际也就是说明交错组的存在乃是最佳逼近多项式的特征。作为基本定理的一个推论，还很容易得出唯一性定理。

定理 4 对于给定的$f(x)\in C[a, b]$，集合H_n中只存在一个最佳逼近多项式。

【证】 假如在H_n中有两个最佳逼近多项式$P(x)$和$Q(x)$，则对一切x将有

$$-E_n\leqslant P(x)-f(x)\leqslant E_n,\quad -E_n\leqslant Q(x)-f(x)\leqslant E_n。$$

将两个不等式相加除以 2，则得

$$-E_n\leqslant\frac{P(x)+Q(x)}{2}-f(x)\leqslant E_n。$$

这表明$R(x)=\frac{1}{2}[P(x)+Q(x)]$也是一个最佳逼近多项式。因而对$R(x)$而言，将存在交错组

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}。$$

设x_k是$R(x)$的一个$(+)$点，则

$$\frac{1}{2}[P(x_k)+Q(x_k)]-f(x_k)=E_n。$$

由$Q(x_k)-f(x_k)\leqslant E_n$可推出

$$\frac{1}{2}[P(x_k)-f(x_k)]\geqslant E_n-\frac{1}{2}E_n=\frac{1}{2}E_n,$$

亦即 $P(x_k)-f(x_k)\geqslant E_n$。但 $P(x)-f(x)$ 总不能大于 E_n，因此 $P(x_k)-f(x_k)=E_n$。这表明 x_k 是 $P(x)$ 的一个(+)点。同理可知它也是 $Q(x)$ 的一个(+)点，于是

$$P(x_k)-f(x_k)=E_n=Q(x_k)-f(x_k),$$

亦即在交错组的 $n+2$ 个点上 $P(x_k)=Q(x_k)$。既然 P, Q 都是 n 次多项式，因而 $P(x)\equiv Q(x)$。

注记1 对于已经掌握泛函分析基础知识的读者说来，不难理解到关于最佳逼近问题的提法可以提得更为一般些，例如，我们可以讨论线性赋范空间 E 中的任一元素 y 由空间中有限多个线性无关元素 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 所构成的线性组合作最佳逼近的问题。就这种情况而言，事实上成立着更一般的 Borel 存在定理。论证的方法也一模一样，只要将广义绝对值理解成一般意义下的范数即可(可参考 Люстерник-Соболев 合著的《泛函分析概要》第二章§16)。

注记2 Чебышев 的基本定理暗示了作最佳逼近多项式的途径，特别是在某些最简单的情况下(例如 $n=0$, 1 时)计算非常容易。但就一般的情形说来，要寻找具体的最佳逼近多项式却是一个极其困难又是至今尚未完全解决的问题。当然，有时为了实际上的需要，将不得不借助于近似解法。关于这方面的结果，可参阅 И. П. Натансон 的书《函数构造论》的第一篇第二章。

§4. Чебышев 多项式

Чебышев 多项式的发现是和考虑如下的问题分不开的：给定函数 $f(x)=x^n(-1\leqslant x\leqslant 1)$，问怎样以不高于 $n-1$ 次的多项式

$$P_{n-1}(x)=-c_0-c_1x-\cdots-c_{n-1}x^{n-1}$$

去作最佳逼近？

根据 Чебышев 基本定理，如果 $P_{n-1}(x)$ 是 x^n 的最佳逼近多项式，那么偏差

$$|x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0|$$

就得在区间 $[-1,\ 1]$ 的某 $n+1$ 个点(所谓交错组)处依次改变符号并达到它的最大值。显然，上述的偏差也可以看作是 n 次多项式

$$P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,\quad c_n=1$$

与 $f(x)=0$ 的偏差。因此原来所考虑的问题也可以称之为最小零偏差问题——亦即以 H_n 中最高次项系数为 1 的多项式去作 0 的最佳逼近的问题。同时，对 0 的最佳逼近多项式 $P_n(x)$ 也可称之为 n 次的最小零偏差多项式。

为了去确定 $P_n(x)$ 的具体结构形式，让我们来回忆一下三角函数 $y=\cos n\theta$ 的简单性质。显然这函数在 $n+1$ 个点 $\theta_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 处依次改变符号，并使 $|\cos n\theta|$ 达到它的最大值 1。另一方面，我们又知道 $\cos n\theta$ 可以展开成 $\cos\theta$ 的含 n 次乘幂的有穷级数。这样一来，可见只要令 $\cos\theta=x$ (亦即 $\theta=\arccos x$)，$\cos n\theta$ 便变成了 x 的 n 次代数多项式。换句话说，

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

就是 x 的 n 次多项式，而且它具有如下的 Чебышев 交错组(诸点分布在区间 $[-1,\ 1]$ 上)：

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n}\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)。\tag{4.1}$$

这样一来，我们几乎已经解决了 $P_n(x)$ 的构造问题。唯一剩下来的事情只是去选定一常数因子 c_n，俾使 $c_n\cos(n\arccos x)$ 的最高次项 x^n 的系数成为 1 就可以了。

注意

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n]$$

$$=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n],$$

将上式最右端的式子除以 x^n 并取极限，得到

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n+\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=2^{n-1}。$$

所以，取 $c_n=2^{-(n-1)}$ 便得到了最小零偏差多项式 $P_n(x)$：

$$\tilde{T}_n(x)=2^{-(n-1)}\cos(n\arccos x)。\qquad(4.2)$$

这样一来，原来所考虑的问题也已经完全解决；因为只要取 $P_{n-1}(x)=\tilde{T}_n(x)-x^n$ 就可以了。

显然 $\tilde{T}_n(x)$ 也可以表作

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^n}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n],\qquad(4.3)$$

这便是通常所称的 n 次 Чебышев 多项式。

其次，根据三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

作变数代换 $\theta=\arccos x$ 还可以导出如下的递推公式：

$$\tilde{T}_{n+1}(x)=x\tilde{T}_n(x)-\frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x)\qquad(4.4)$$

$$(n=2,\ 3,\ \cdots)。$$

注意 $\tilde{T}_0(x)\equiv1$。因此反复利用上面的递推公式，可以很容易地定出：

$$\tilde{T}_1(x)=x,$$

$$\tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2},$$

$$\tilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x,$$

$$\tilde{T}_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8},$$

$$\tilde{T}_5(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x,$$

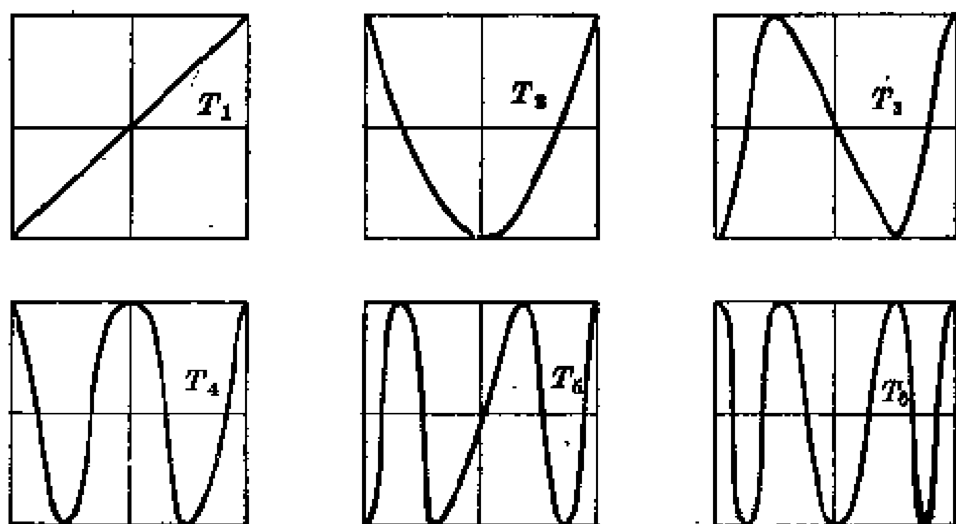
$$\tilde{T}_6(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{32},$$

等等。至于最一般的形式，可以表作

$$\tilde{T}_n(x) = x^n + \sum_{1\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1} x^{n-2k}。 \qquad (4.5)$$

这个普遍表达式是可以根据 (4.2) 及余弦 n 倍角公式推导出来的，这里就不去细说了。

为使读者获得一个更具体的印象，这里不妨将定义在区间 $[-1, 1]$ 上的前六个 Чебышев 多项式 $T_n(x) = 2^{n-1}\tilde{T}_n(x)$ 的几何图形列示如下：



从图中可看出每个 $\tilde{T}_n(x)$ 或 $T_n(x)$ 都有 $n+1$ 个偏离点，而诸 $\tilde{T}_n(x)$ 的偏差分别为

$$\|\tilde{T}_1\| = 1, \quad \|\tilde{T}_2\| = \frac{1}{2}, \quad \|\tilde{T}_3\| = \frac{1}{4},$$

$$\|\tilde{T}_4\|=\frac{1}{8},\ \|\tilde{T}_5\|=\frac{1}{16},\ \|\tilde{T}_6\|=\frac{1}{32}。$$

一般说来，由形如 $x^n+c_{n-1}x^n+\cdots+c_1x+c_0$ 的多项式所能给出的最小零偏差为

$$\|\tilde{T}_n\|=\frac{1}{2^{n-1}}\|\cos(n\arccos x)\|=\frac{1}{2^{n-1}}。$$

最后，我们再指出 Чебышев 多项式系统的一个重要性质，即在区间 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交性质：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{T}_m(x)\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,\ \text{当}\ m\neq n\ \text{时}。\tag{4.6}$$

证明极易。令 $x=\cos\theta$，则 $dx=-\sin\theta d\theta=-\sqrt{1-x^2}\,d\theta$，且 $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta$。因之上述积分转化为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2}\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta d\theta=0\quad(m\neq n)。$$

我们知道在机械求积公式的理论中，多项式系统 $\{T_n(x)\}$ 的正交性是构造某种 Gauss 型求积公式的依据。又关于 Чебышев 多项式诸性质的进一步讨论，可查阅 Натансон 的《函数构造论》第一编第二章§4。

§5. 三角多项式的一般性质

前四节所讨论的，都是关于用代数多项式去逼近连续函数的问题。如果考虑利用最简单的分析工具去逼近周期性的连续函数，自然就想到应该利用三角多项式。为了以后便于应用起见，下面我们就来讨论实系数的三角多项式所具有的某些普遍性质。

多项式 $T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

中的系数 a_n 和 b_n 如果不全为 0，则称 $T(x)$ 为 n 阶的三角多项式。

命题 1 两个三角多项式的乘积仍然是一个三角多项式，而且它的阶等于原来两个多项式之阶的和。

【证】 设 $H(x)$ 是一个 m 阶的三角多项式

$$H(x)=c_0+\sum_{j=1}^{m}(c_j\cos jx+d_j\sin jx),$$

则 c_m 与 d_m 不全为零。因此如果与 n 阶的三角多项式 $T(x)$ 相乘起来，则乘积中至少会出现下列四项之一(系数不计)：

$$\cos nx\cos mx,\ \cos nx\sin mx,\ \sin nx\cos mx,\ \sin nx\sin mx。$$

利用三角函数的积化和差公式，立即知道经简化后至少会出现下列二项之一(系数不计)：

$$\cos(n+m)x,\quad \sin(n+m)x。$$

这就表明 $T(x)$ 与 $H(x)$ 的乘积至少是一个 $(n+m)$ 阶的三角多项式。其次，易看出 $T(x)H(x)$ 中所有其余的项经简化成 $A_\nu\cos\nu x$ 与 $B_\nu\sin\nu x$ 的形式后，总是 $\nu<n+m$。因此可以结论出 $T(x)H(x)$ 恰好是一个 $(n+m)$ 阶的三角多项式。

命题 2 若三角多项式 $T(x)$ 具有偶性：$T(-x)=T(x)$，则它必可表为

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx。$$

【证】 只须把两个等式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$T(-x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx-b_k\sin kx)$$

加起来除以 2 即得。同理，如果将上列二等式相减除以 2，则便可证明下述

命题 3 凡具有奇性 $T(-x)=-T(x)$ 的三角多项式恒可表示成

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx。$$

三角多项式的零点 对于任意一个具有实系数的 n 阶三角多项式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

而言，凡使 $T(x)$ 取零值的实数 x_0 便称为它的零点。如果 $T(x_0)=T'(x_0)=\cdots=T^{(r-1)}(x_0)=0$ 而 $T^{(r)}(x_0)\neq 0$，那末就称 x_0 为 r 重零点。下面我们所说的零点概指实数值的零点而言。

显然一个三角多项式也可以没有零点。例如 $\cos x\pm 2$ 就没有零点。又由于三角多项式是以 2π 为周期的函数，因此如果当 x_0 是一个零点时，则一切形如 $x_0+2m\pi(m=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的数也都成为零点。不过对这些带 2π 周期的零点，今后我们都不加以区别，而把它们称为是互相等价的。

在计算零点的个数时，虽然等价的零点是不计算的（实际，等价零点有无限多个），但零点的重数却可以计算在内，即 m 重零点可算作 m 个。现在我们来证明下述的

命题 4 凡不恒等于零的 n 阶三角多项式 $T(x)$ 的零点个数恒不能超过 $2n$。

【证】 显然可把 $T(x)$ 表成如下的指数函数形式：

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)$$

$$=e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}c_k e^{ikx},$$

自然，系数 c_k 也可能是复数。

记 $e^{ix}=z$，则

$$T(x)=z^{-n}\sum_{k=0}^{2n}c_k z^k=z^{-n}P(z),$$

其中 $P(z)$ 是 z 的 $2n$ 次代数多项式。容易看出，$T(x)$ 的两个不等价的零点将对应着 $P(z)$ 的一对不相同的零点。此外，如果对变数 x 不断微分等式

$$P(z)=e^{inx}T(x)$$

的两边，并注意到 $\frac{dz}{dx}=ie^{ix}$，则易得出

$$P'(z)=e^{i(n-1)x}[nT(x)-iT'(x)],$$

$$P''(z)=e^{i(n-2)x}[\alpha T(x)+\beta T'(x)+\gamma T''(x)],$$

其中 α, β, γ 为某些数值系数。一般地，我们有

$$P^{(s)}(z)=e^{i(n-s)x}[x_0T(x)+x_1T'(x)+\cdots+x_sT^{(s)}(x)]。$$

因此，假如 x_0 是 $T(x)$ 的 m 重零点，则

$$T(x_0)=T'(x_0)=\cdots=T^{(m-1)}(x_0)=0,$$

从而对 $z_0=e^{ix_0}$ 而言便有

$$P(z_0)=P'(z_0)=\cdots=P^{(m-1)}(z_0),$$

亦即 z_0 至少是 $P(z)$ 的不低于 m 重的零点。这说明就彼此相应的零点 $x_0\leftrightarrow z_0$ 而言，$P(z)$ 的零点个数（重数计算在内）决不少于 $T(x)$ 的零点个数。因此 $T(x)$ 的全部（互不等价的）零点个数决不多于 $P(z)$ 的全部零点个数。但由代数基本定理知，$P(z)$ 的全部零点个数是 $2n$。故命题 4 获得证明。

命题 5 两个 n 阶三角多项式如果在 $2n+1$ 个互不等价的点组上相等，则它们必恒等。

这是命题 4 的一个推论。因为如果 $T(x)$ 与 $T^*(x)$ 是命题中所说的两个多项式，则当它们的差 $T(x)-T^*(x)$（不高于 n 阶的多项式）在 $2n+1$ 个点上取零值时，那就不能不是

$T(x)-T^*(x)\equiv 0$。

§6. Weierstrass 的第二定理

利用三角多项式，可以任意近似地表示周期性的连续函数。精确地说，就是下述的

定理 5(Weierstrass, 1885) 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，那末对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在这样的三角多项式 $T(x)$，使得

$$\max_{-\pi\leq x\leq \pi}|T(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

这个定理事实上可以从第一定理(定理 1)推论出来。以下我们将按照 Vallée-Poussin 所建议的推理方式来论证这一点。

【证】 首先，不难论证：对于区间 $[0, \pi]$ 上的任一连续函数 $f(x)$，以及任意指定的 $\varepsilon>0$，都有偶性的三角多项式 $T(x)$ 存在，使得 $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$。

事实上，单值函数 $f(\arccos y)$ 在闭区间 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上是连续的。因此由定理 1 可知存在多项式 $\sum_{k=0}^{n}c_k y^k$，使得

$$\max_{-1\leq y\leq 1}\left|f(\arccos y)-\sum_{k=0}^{n}c_k y^k\right|<\varepsilon。$$

这就相当于 $$\max_{0\leq x\leq \pi}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\cos^k x\right|<\varepsilon。$$

而 $T(x)=\sum c_k\cos^k x$ 自然是一个偶性三角多项式。

现在我们假设 $f(x)$ 是 $C_{2\pi}$ 中的任一函数，则

$$[f(x)+f(-x)]\sin^2 x,\quad [f(x)-f(-x)]\sin x$$

显然是两个偶函数。自然，可以找到偶性三角多项式 $F_1(x)$ 及 $F_2(x)$ 使得在区间 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 上恒有

$$|[f(x)+f(-x)]\sin^2 x-F_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|[f(x)-f(-x)]\sin x-F_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

注意在上列不等式中令 x 换作 $-x$ 时形式并不改变。再考虑到函数的周期性，便知道这两个不等式实际对一切实数 x 都成立。

显然上述的两个不等式可改写成等式的样子：

$$[f(x)+f(-x)]\sin^2 x=F_1(x)+\rho_1(x),$$

$$[f(x)-f(-x)]\sin^2 x=F_2(x)\sin x+\rho_2(x)。$$

如此便得到 $\quad f(x)\sin^2 x=F_3(x)+\rho_3(x),$

其中 $|\rho_3(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，而 $F_3(x)$ 仍然是一个三角多项式。

注意上述等式中的 $f(x)$ 可以是 $C_{2\pi}$ 中的任意函数。因此把它换作 $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$后仍然会有

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x=F_4(x)+\rho_4(x),\quad |\rho_4(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

再在上式中把 x 换作 $x+\frac{\pi}{2}$，并记 $F_4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=F_5(x)$，则有

$$f(x)\cos^2 x=F_5(x)+\rho_5(x),\quad |\rho_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $F_5(x)$ 仍然是三角多项式。最后加以合并，我们便得到：

$$f(x)=F_3(x)+F_5(x)+\rho_3(x)+\rho_5(x)。$$

这样一来，就看出三角多项式 $T(x)=F_3(x)+F_5(x)$ 和 $f(x)$ 之差恒保持不超过 $|\rho_3(x)+\rho_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，因而也就证明了第二定理确实能从第一定理推导出来。

最后再指出，Weierstrass 的第一定理也可以从第二定理推导出来(而且推导方式还比上述论证方法更为简单一些)。因此，用数理逻辑的术语来说，第一定理和第二定理实际是

一对互相等价的命题。

§7. 三角多项式的最佳逼近问题

利用三角多项式来逼近 $C_{2\pi}$ 中的函数时，同样有最佳逼近问题。从问题的提法，理论的展开以及所达到的结论来看，可以说是和代数多项式的逼近理论完全相似的。就若干重要定理（如 Borel 的存在定理，Чебышев 的基本定理与唯一性定理）的论证方法来看，它们也是完全平行的。既是如此，除了应该把一些基本概念和重要定理交代一下外，就没有必要再去重复那些本质上和 §2 与 §3 中内容相同的东西。

以 H_n^* 来表示一切 n 阶三角多项式 $T(x)$ 作成的集合。对于给定了的一个函数 $f(x)\in C_{2\pi}$，我们同样可以定义

$$\Delta(T)=\|T(x)-f(x)\|=\max|T(x)-f(x)|,$$

$$E_n^*=E_n^*(f)=\inf_T\{\Delta(T)\},$$

而分别称 $\Delta(T)$ 与 E_n^* 为*偏差*与*最小偏差*。同样，如果 $T^*(x)\in H_n^*$ 是一个达到最小偏差的多项式

$$\Delta(T^*)=E_n^*,$$

那就称它为*最小偏差多项式*或*最佳逼近多项式*。完全平行地有下述的 Borel 存在定理。

定理 6 对于每个 n，在 H_n^* 中都有这样的三角多项式 $T(x)$ 存在，使得 $\Delta(T)=E_n^*$。

事实上，§2 中的证明可以一模一样地搬到这里来。所须注意者，当

$$\psi=\left\|A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right\|=0$$

时，将必然会有 $A=a_k=b_k=0\ (k=1, 2, \cdots, n)$；而这一点乃是 §5 中命题 4 的一个简单推论。

其次，在同样地引入了正负偏离点与 Чебышев 交错组的概念之后，可建立如下的 Чебышев 定理：

定理 7 H_n^* 中的三角多项式 $T(x)$ 成为某给定函数 $f(x)\in C_{2\pi}$ 的最小偏差多项式的充要条件是，对函数差 $T(x)-f(x)$ 而言存在有 $2n+2$ 个点

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+2} \quad (0 \leqslant x_k < 2\pi)$$

作成的交错组。

我们注意到 § 3 中相应的基本定理Ⅲ所说的交错组，其点数为 $n+2$；亦即恰好比 n 次代数多项式的零点个数多 2。这一点在其归谬证法中实起关键性的作用。同理，考察一下此处所述定理的归谬证法，并考虑到 n 阶三角多项式最多能有 $2n$ 个零点（§ 5 命题 4），那就不难由分析而理解到为什么此处所说的交错组须含点 $2n+2$ 个。

最后完全类似地，我们有如下的

定理 8 对于所给函数 $f(x)\in C_{2\pi}$，在集合 H_n^* 中只存在一个最小偏差多项式。

特别是，有如下一条

推论 若 $f(x)$ 是 $C_{2\pi}$ 中的一个偶函数，则它的最小偏差多项式 $T(x)$ 也必是偶函数——偶性的三角多项式。

事实上，由最小偏差多项式的定义可知

$$|f(x)-T(x)| \leqslant E_n^* \quad (-\infty < x < \infty)。$$

令 x 改作 $-x$，并注意 $f(x)$ 的偶性，则 $|f(x)-T(-x)| \leqslant E_n^*$。从而可知 $T(-x)$ 也是 $f(x)$ 的最小偏差多项式。因之由唯一性定理便得出

$$T(-x)=T(x) \quad (-\infty < x < \infty)。$$

这就证明了 $T(x)$ 为偶性三角多项式。

第二章习题

1. 设 N 是一个大于 $n+1$ 的任意正整数。试证明 $C[0, 1]$ 中恒存在一函数 $f(x)$，使得 H_n 中关于 $f(x)$ 的最佳逼近多项式恰好具有 N 个正负交错的偏离点(所谓 Чебышев 交错组)。

[提示] 考虑函数 $f(x)=x^n+\sin(N\pi x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$。

2. 试证明对于任何连续函数说来，其最佳逼近多项式所具有的 Чебышев 交错组中的偏离点个数不可能为无穷多。

[提示] 利用反证法，并借助于 Bolzano-Weierstrass 的凝聚点定理。

3. 试证明 $C[a, b]$ 中有这样的连续函数，H_n 中关于它的最佳逼近多项式具有无穷多个偏离点(当然不成为交错组)。

4. 在形如 $\sin nx+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的所有 n 阶三角多项式中，试求出与零在区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上有最小偏差的那个三角多项式。

5. 试在一切具有已知最高次项系数 a 的 n 次多项式 $f(x)=ax^n+\cdots$ 中，找出在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上与零有最小偏差的那个多项式。

6. 试利用 Чебышев 多项式将三次方程

$$x^3-15x^2-150x+1000=0$$

近似地约化为二次方程，然后求出其根，再与三次方程的根的精确值 $x=5$, $x=-10$, $x=20$ 作比较。

7. 根据 Weierstrass 的逼近定理，$c[a, b]$ 中的函数 $f(x)$ 恒能表示成一致收敛的多项式级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(x)\quad(Q_k(x)\text{是多项式})。$$

试问能否将右端级数中的各个乘幂项重新排列，使它变成一个幂级数？当 $f(x)$ 不是可微函数或解析函数时能否这样做？

[提示] 用反证法。

8. 设 $f(x)\in C[0, 1]$，但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非处处可微，又设 $f(x)$ 被表示成的多项式级数为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_0^{(k)}+c_1^{(k)}x+\cdots+c_{\nu_k}^{(k)}x^{\nu_k}),$$

试证明 $$\sum_{k=1}^{\infty}(|c_0^{(k)}|+|c_1^{(k)}|+\cdots+|c_{\nu_k}^{(k)}|)=+\infty。$$

［提示］ 可利用反证法。

9．试作适当的变数替换，让 Бернштейн 多项式序列能用来逼近区间$[-1, 1]$上的连续函数。

［提示］ 经变数替换后的 Бернштейн 多项式具有下列形式:

$$B_n^*(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{2k-n}{n}\right)\binom{n}{k}2^{-n}(1+x)^k(1-x)^{n-k}。$$

10．试将 Бернштейн 多项式推广到二元函数的情形，并证明能利用它们来一致逼近二元连续函数 $f(x, y)(0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1)$。

11．试验证函数 $f(x)=\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的 Бернштейн 多项式可表示成如下的形式:

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]。$$

12．试根据三角函数可以展为幂级数的事实，验证 Weierstrass 第一定理可以从第二定理推导出来。

13．设 $f(x)\in C[a, b]$, $P(x)\in H_n$, 则数值 $\Delta(P)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\rho(x)|P(x)-f(x)|$ 称为 P 对 f 的*带权偏差*，此处 $\rho(x)$ 是一个正值的连续函数（称之为*权函数*）。试证明对这样的偏差概念而言，照样有 Чебышев 的最佳逼近问题和基本定理。

14．在 $x=\xi(\xi>1)$处取值 η 的所有 n 次多项式中，试求出在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的那个最小零偏差多项式。

［提示］ 所求多项式可以表成 $P(x)=(x-\xi)Q(x)+\eta$, 其中 $Q(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。由于

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|(x-\xi)Q(x)+\eta|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x-\xi|\cdot\left|Q(x)+\frac{\eta}{x-\xi}\right|,$$

故可将 $\rho(x)=|x-\xi|$ 当作权函数，并将原问题看作是用 $n-1$ 次多项式去逼近 $\frac{\eta}{x-\xi}$ 的问题。

第三章　函数的结构性质与多项式逼近阶之间的联系

§1. 连续模数及其性质

"连续模数"是一种用来表示函数连续性状态的基本数量，在分析函数的结构性质与多项式逼近速度之间的关系时，它起着很重要的作用。这种数量最早是在 Vallée-Poussin 等人的著作中被引入的。

今后我们用 $\langle a, b\rangle$ 来表示以 a, b 为端点的一般区间（可以是开的，闭的或半开半闭的区间；也可以是 $(-\infty, \infty)$）。假设 $f(x)$ 是定义在 $\langle a, b\rangle$ 上的一个实函数，那末我们便把数量

$$\omega(\delta)=\sup_{|x-y|<\delta}\{|f(x)-f(y)|\} \tag{1.1}$$

叫做函数 $f(x)$ 的连续模数，其中 δ 是一个任意正数。

连续模数 $\omega(\delta)$ 实际是表明了当自变数的两个值相差不大于 δ 时，函数值之间究竟顶多能相差多少。对于固定的 δ，ω 是函数振荡特性的度量。下面我们列出有关连续模数的一系列简单性质，它们的验证都是十分容易的（一部分留给读者作习题）。

1° 函数 $\omega(\delta)$ 是单调递增的，亦即当 $\delta_1<\delta_2$ 时将有

$$\omega(\delta_1)<\omega(\delta_2)。 \tag{1.2}$$

2° 函数 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上一致连续的充分必要条件是

$$\lim_{\delta\to0}\omega(\delta)=0。 \tag{1.3}$$

这只须根据一致连续性的定义即可看出。

3° 若 n 是一个正整数，则

$$\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)。\tag{1.4}$$

事实上，这相当于下列不等式：

$$\sup_{|x-y|\leqslant n\delta} |f(x)-f(y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{|x_i-y_i|\leqslant\delta} |f(x_i)-f(y_i)|。$$

4° 对于任意正数 λ 都有不等式

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta)。\tag{1.5}$$

事实上，令 $[\lambda]$ 表 λ 的整数部分，则易见

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant \omega(([\lambda]+1)\delta) \leqslant ([\lambda]+1)\omega(\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta)。$$

注意这个性质 4°，在我们今后讨论定理时，是经常会用到的。

5° 设 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 $\langle a, b\rangle$ 上恒适合如下的 Lipschitz 条件：

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

其中正常数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 和 M 分别称为指数和系数。亦可把满足此种条件的所有函数作成的集合称为 Lipschitz 函数类 $\mathrm{Lip}_M\,\alpha$。这样，下列两个关系式

$$f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha,\quad \omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}$$

便是完全等价的。

事实上，如果 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M\alpha$，则

$$\omega(\delta)=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)| \leqslant M \sup_{|x-y|\leqslant\delta}|x-y|^{\alpha}=M\,\delta^{\alpha}。$$

反之，若 $\omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}$，则

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \omega(|x-y|) \leqslant M|x-y|^{\alpha}。$$

§2. 关于逼近速度的 Jackson 定理

函数的结构性质(如象连续性，可微性，满足 Lipschitz 条件等属性)究竟对最小偏差 E_n (或 E_n^*)趋于 0 的速度会发生

怎样的影响呢？这是在逼近论发展到一定的历史阶段自然要提出的问题。关于这个问题的探讨，我们知道有若干基本结论是在 D. Jackson 的 1911 年的博士论文工作中获得的。下面我们就来论述他所得到的一些主要结果。

定理 1 设 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$，并且具有周期 2π，则一定存在一绝对常数 K 使得

$$E_n^* \leqslant \frac{KM}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots), \tag{2.1}$$

其中 $E_n^*=E_n^*(f)$ 为 n 阶三角多项式对 $f(x)$ 的最佳逼近（或最小偏差）。

这是一个很重要的结果，以后我们就会看到，利用此结果可以完全解决关于函数类 $C[a,\ b]$ 与 $C_{2\pi}$ 的 E_n 与 E_n^* 究竟以何种速度下降于零的问题。

为证定理 1，先证明下面的

引理 1 若 m 为正整数，则分式

$$\left[\frac{\sin\frac{1}{2}mx}{\sin\frac{1}{2}x}\right]^4 \tag{2.2}$$

必是 x 的一个 $2m-2$ 阶的偶性三角多项式。

【证】 事实上，只须验证分式

$$\left[\frac{\sin\frac{1}{2}mx}{\sin\frac{1}{2}x}\right]^2=\frac{1-\cos mx}{1-\cos x}$$

是一个 $(m-1)$ 阶三角多项式即可。显然我们从等式

$$\cos mx+i\sin mx=(\cos x+i\sin x)^m$$

两边的比较可得知

$$1-\cos mx=1-\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{m}{2k}\cos^{m-2k}x\sin^{2k}x,$$

于是

$$\frac{1-\cos mx}{1-\cos x}$$

$$=\frac{1-\cos^m x}{1-\cos x}-\sum_{k\geq 1}(-1)^k\binom{m}{2k}\cos^{m-2k}x\frac{(1-\cos^2 x)^k}{1-\cos x}。$$

注意上式右端各项中的分式都可化为 $\cos x$ 的 $(m-1)$ 次多项式。因此最后可以肯定(2.2)中的分式能够表作:

$$\left[\frac{\sin\frac{1}{2}mx}{\sin\frac{1}{2}x}\right]^4=A+\sum_{k=1}^{2m-2}a_k\cos kx。$$

引理证毕。

【定理 1 的证明】 记

$$\lambda_m=\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\sin mu}{m\sin u}\right]^4du\right)^{-1},$$

$$I_m(x)=\lambda_m\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x+2u)\left[\frac{\sin mu}{m\sin u}\right]^4du。$$

如果令 $x+2u=y$, 并注意到 $f(y)$ 与整个被积函数的周期性(从而可将积分区间任意平移), 立即看出 $I_m(x)$ 可以改写作

$$I_m(x)=\frac{1}{2}\lambda_m\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{\sin\frac{m}{2}(y-x)}{m\sin\frac{1}{2}(y-x)}\right]^4dy。$$

依引理 1, 可以看出上式右端为 x 的 $(2m-2)$ 阶三角多项式, 下面我们要去证明三角多项式 $I_m(x)$ 能以极好的速度收敛于所给的函数 $f(x)$。

我们来估计差数 $|I_m(x)-f(x)|$。注意 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$, 亦即有

$$|f(x+2u)-f(x)|\leqslant 2M|u|。$$

因此易导出

$$\begin{aligned}
&|I_m(x)-f(x)|\\
&=\left|\lambda_m\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(f(x+2u)-f(x))\left[\frac{\sin mu}{m\sin u}\right]^4du\right|\\
&\leqslant 2M\lambda_m\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|u|\left[\frac{\sin mu}{m\sin u}\right]^4du\\
&=4M\lambda_m\int_0^{\pi/2}u\left[\frac{\sin mu}{m\sin u}\right]^4du\\
&=2M\frac{\int_0^{\pi/2}u\cdot[\cdots]^4du}{\int_0^{\pi/2}[\cdots]^4du}。
\end{aligned}$$

进一步再来分别估计最后一式中的分子与分母，令 c_1 与 c_2 为由下列两积分所定义的数值常数：

$$c_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 t}{t^4}dt,\quad c_2=\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt。$$

注意 $0<\sin u<u(0<u\leqslant\pi/2)$；且 $\frac{\sin u}{u}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单调下降函数，从而

$$\frac{\sin u}{u}>\frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)}=\frac{2}{\pi},\quad \frac{1}{\sin u}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{u}。$$

因此分母与分子各有如下估计：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}[\cdots]^4du&>\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4du=\frac{1}{m}\int_0^{m\pi/2}\frac{\sin^4 t}{t^4}dt\\
&\geqslant\frac{1}{m}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 t}{t^4}dt=\frac{c_1}{m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}u\cdot[\cdots]^4du&\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_0^{\pi/2}u\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4du\\
&<\frac{1}{m^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\frac{c_2}{m^2}。
\end{aligned}$$

于是，分别以所得出的下界与上界代入原来分式中的分母与分子，便得到

$$|I_m(x)-f(x)|\leqslant\frac{\pi^4c_2M}{8c_1m}\quad(m=1,\ 2,\ 3,\cdots)。\tag{2.3}$$

最后，令 n 为任意正整数；又令 m 取为整数部分：$m=\left[\frac{n+2}{2}\right]$（如是，自然有 $2m-2<n\leqslant 2m$）。又令 $I_m(x)$ 改记作 $T_n(x)$，则 $T_n(x)$ 便是一个阶数不大于 n 的三角多项式。注意 $\frac{1}{m}<\frac{2}{n}$，因此令 $K=\frac{\pi^4c_2}{4c_1}$ 时，由(2.3)式便导致不等式(2.1)。这就证明了 Jackson 的定理 1。

定理 2 (Jackson 的基本定理) 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，则对于一切正整数 n 都成立着如下的估计式：

$$E_n^*\leqslant K\omega\left(\frac{1}{n}\right),\tag{2.4}$$

其中 K 为绝对常数，$\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 表 $f(x)$ 的连续模数。

【证】 只须证明有 n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 存在，使得不等式 $|T_n(x)-f(x)|<K\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 成立即可。

显然总能够作出如此的折线函数 $g(x)$，要求它在下列的一些点上：

$$-\pi,\ -\pi+\frac{2\pi}{n},\ -\pi+\frac{4\pi}{n},\cdots,\ \pi-\frac{2\pi}{n},\ \pi$$

和函数 $f(x)$ 的值一致，自然，它本身也一定是一个具有 2π 周期的连续函数。又由于它的图形是由各段直线联成的，端点的纵坐标之差显然不会大过 $\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$。因此各段直线的斜率均不超过

$$M=\frac{\omega(2\pi/n)}{2\pi/n}。\tag{2.5}$$

如此，可见对于上述的 M 而言，定理 1 的条件恰好能被函数 $g(x)$ 所满足。依定理 1 和 (2.5) 式，自然存在有三角多项式 $T_n(x)$ 使得

$$|T_n(x)-g(x)|\leqslant\frac{K'M}{n}=\frac{K'}{2\pi}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

其中 K' 为绝对常数。另方面，由于具有同一横坐标 x 的曲线上的点 $(x, f(x))$ 与折线上的点 $(x, g(x))$ 同它们附近的公共交点的纵坐标值比较起来，其差都不会大过 $\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$。因此

$$|g(x)-f(x)|\leqslant 2\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)。$$

于是合并起来，并注意(1.5)式，便得到了不等式

$$|T_n(x)-f(x)|\leqslant\left(\frac{K'}{2\pi}+2\right)\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\leqslant K\,\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中取 $K=(2\pi+1)\left(\frac{K'}{2\pi}+2\right)$。定理 2 因而得证。

由定理 2 显然易得如下的几条推论：

推论 1 Weierstrass 的第二定理恒成立。

推论 2 若 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则

$$E_n^*\leqslant KM\frac{1}{n^\alpha}。\tag{2.6}$$

推论 3 若 $f(x)\in C_{2\pi}$ 且存在着有界的微商 $f'(x)$，而 $|f'(x)|<M$，则

$$E_n^*\leqslant KM\frac{1}{n}。$$

事实上，由于 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\to 0(n\to\infty)$，故推论 1 的成立是显然的。又再由 §1 中所述连续模数 $\omega(\delta)$ 的性质 5°，可知推论 2

也显然成立。其次，若设 $|f'(x)|<M$，则由 Lagrange 中值公式，

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|,$$

可知 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$。因此推论 3 又是推论 2 的推论。

注记 1 在我们证明定理 1 及 2 时，并没有十分关心去指明常数 K 的大小究竟怎样。事实上，正如 Jackson 本人所指出的，如果将论证步骤中出现的诸不等式(或估计式)加以精化，那末就可以证明在定理 1 中只须取 $K=3$ 就成了。至于定理 2，取 $K=12$ 也就足够了。读者如有兴趣，可去参考 Натансон 的«函数构造论»第一编第四章 § 2—3。

注记 2 定理 1 中出现的积分 $I_m(x)$ 叫做 Jackson 的奇异积分，它可写作

$$I_m(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Psi_m(y-x)dy,$$

其中 $\Psi_m(u)$ 叫做 Jackson 核，可以表成

$$\Psi_m(u)=\frac{3}{2m\pi(2m^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{m}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^4。$$

事实上，利用三角恒等式

$$\left(\frac{\sin\frac{m}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2=n+2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\cos ku,$$

代入原 $I_m(x)$ 的因子 λ_m 中，可以将 λ_m 的数值精确地算出来。亦即有

$$\lambda_m=\frac{3m^3}{\pi(2m^2+1)},$$

具体算法并不困难，此处从略。

注记 3 就定理 1 及 2 中所表明的 E_n^* 的收敛速度（逼近阶）而言，是无法再改进的了，这一事实当我们在下节中讨论了 Бернштейн 定理之后，即可彻底理解。

§3. Бернштейн 不等式

在函数结构性质的研究中，起着极重要作用的一个强有力工具，是 Бернштейн 在 1912 年发现的不等式。下面即可看到，无论是从该不等式的重要性还是从简明性来看，都是值得高度重视的。

Бернштейн 不等式 设

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是一个 n 阶的三角多项式，则它的导数 $T'(x)$ 有估值式：

$$|T'(x)|\leqslant n\cdot\max|T(x)|。\qquad(3.1)$$

这个命题可以改述为如下的等价形式：

不等式的另述 若 $\max|T'(x)|=1$，则

$$\max|T(x)|\geqslant\frac{1}{n}。\qquad(3.2)$$

事实上，只要在原来的估值式的两边，除以常数 $K=\max|T'(x)|$，并将多项式 $\frac{1}{K}T(x)$ 仍记为 $T(x)$，便可看出另述是与原来叙述形式完全等价的（至于 $K>0$ 这一事实，那是由 $T(x)\neq 0$ 所保证的）。

【不等式的证明】 我们来证明另述中的那个不等式。这里所给的证法主要是由 M. Riesz 和 Vallée-Poussin 互不相依地提出的。

利用归谬推理，假定 $\max|T(x)|<\frac{1}{n}$。于是对于任意常

数 c,可知函数

$$F(x)=\frac{1}{n}\cos(nx-c)-T(x)$$

在各点 $\frac{c}{n}$, $\frac{\pi+c}{n}$, $\frac{2\pi+c}{n}$, $\cdots$, $\frac{2n\pi+c}{n}$ 上都和函数 $\cos(nx-c)$有相同的符号;而 $\cos(nx-c)$在这组点上将依次取值 $+1$ 和 -1。因此 $F(x)$也就在该点组所划分出来的 $2n$ 个区间的每一个区间内都至少有一个零点 x_k。总之,我们至少有这样一批零点: $x_1<x_2<\cdots<x_{2n}$, 而 $(x_{2n}-x_1)<2\pi$。应用 Rolle 定理可知 $F'(x)$ 在 $2n$ 个区间 (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\cdots$, (x_{2n-1}, x_{2n}), $(x_{2n}, (x_1+2\pi))$内都有零点存在,亦即在 $(x_1, x_1+2\pi)$ 内有 $F'(x)=0$ 的 $2n$ 个相异根。注意

$$F'(x)=-\sin(nx-c)-T'(x),$$

据假设 $\max|T'(x)|=1$,由连续性必有一点 x_0 使得 $T'(x_0)=\pm1$。另一方面,我们总可以选择常数 c 使得 $\sin(nx_0-c)$取数值 ∓1(符号恰与 $T'(x_0)$相反),从而保证 $F'(x_0)=0$。再注意到 x_0 是 $T'(x)$ 与 $\sin(nx-c)$ 的极值位置,因此自然还有 $T''(x_0)=(\sin nx_0-c)'=0$,亦即还有 $F''(x_0)=0$。如此,可见 x_0 还是 $F'(x)$的重根。于是连根(零点)的重数一并估计在内时 $F'(x)$ 便至少将有 $2n+1$ 个零点。然而 $F'(x)$是 n 阶三角多项式,当零点个数超过 $2n$ 时便只能是 $F'(x)\equiv0$。但这是一个矛盾,因为 $F(x)$是一个时取正值时取负值的函数。

总之,由归谬推理可知只能是 $\max|T(x)|\geqslant\frac{1}{n}$。命题就此得证。

让我们指出,估值式中的系数 n 实际是最佳可能的。例如对 $T(x)=\sin nx$ 而言,我们就有

$$\max|T'(x)|=n\cdot\max|T(x)|。$$

Бернштейн 第二不等式 设 $P(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式，那末下列估值对一切 $x(-1<x<1)$ 都成立：

$$|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|。 \qquad (3.3)$$

事实上，令 $x=\cos\theta$，则应用第一不等式于 n 阶三角多项式 $T(\theta)\equiv P(\cos\theta)$ 上可得

$$\left|\frac{d}{d\theta} P(\cos\theta)\right| = |\sin\theta \cdot P'(\cos\theta)|$$

$$= |\sqrt{1-x^2}\, P'(x)| \leqslant n\cdot\max|P(x)|。$$

因此第二不等式可作为第一不等式的推论而导出。

推论 设 $P(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式，那末如下的估值式对开区间 (a, b) 内的一切 x 都成立：

$$|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |P(x)|。 \qquad (3.4)$$

为得到这个推论，只须作线性代换：

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)y+a+b] \quad (-1\leqslant y\leqslant 1),$$

并将第二不等式应用于 y 的 n 次多项式 $Q(y)\equiv P(x)$ 即可。事实上，

$$\left|\frac{d}{dy} Q(y)\right| = \left|P'(x)\frac{dx}{dy}\right| = \frac{b-a}{2}|P'(x)|$$

$$\leqslant \frac{\max|Q(y)|}{\sqrt{1-y^2}},$$

而此处不等式的右端恒可以化为 x 的函数形式，从而即可得出推论中的不等式。

§ 4. Бернштейн 定理和 Zygmund 定理

在 § 2 中我们已经得知函数的结构性质——如连续性、

可微性等是怎样影响着最佳逼近(或最小偏差) E_n^* 的递减速度。在这一节我们将讨论反向的问题，即怎样根据 E_n^* 的递减速度去作出关于函数结构特性的结论。关于这一方面所得到的最重要结果是属于 Бернштейн 的。

我们已经知道什么叫 Lipschitz 函数类 $\mathrm{Lip}_M\,\alpha$，特别是，在系数 M 无关紧要的情形，可以用记号 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 来表示这种函数类。此外，我们再引进这样一个函数类 W，它是由满足条件

$$\omega(\delta)\leqslant A\,\delta(1+|\log\delta|)$$

的一切函数所组成的函数类，其中 A 与可变正数 δ 无关。可以证明，若函数的定义范围限于有限区间，则有下面的包含关系(留给读者验证)：

$$\mathrm{Lip}\,1\subset W\subset \mathrm{Lip}\,\alpha\quad(0<\alpha<1)。$$

定理 3 (Бернштейн, 1912) 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，并设 E_n^* 表示用 H_n^* 中的三角多项式逼近 $f(x)$ 所得的最小偏差。又设当 $n=1, 2, 3,\cdots$ 时恒有

$$E_n^*\leqslant\frac{K}{n^\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant1),\tag{4.1}$$

那末当 $\alpha<1$ 时可以断定 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$；而当 $\alpha=1$ 时则可以断言 $f(x)\in W$。

【证】 在证明中，为了叙述和记号的简化，我们约定用记号 A 表示那种与函数变量无关的常数，而在各次出现中不必代表同一数值(在此种约定下，例如我们可以写 $2A=A$，等等)。

证明的主要内容无非就是去设法寻求关于 $\omega(\delta)$ 的估计式，从而再根据 $\omega(\delta)$ 与 Lipschitz 条件的联系(例如 §1 中的性质 5°)以及与 W 的条件的联系去作出关于 $f(x)$ 所属函数

类的结论。在估计 $|f(x)-f(y)|(|x-y|\leqslant\delta)$ 的过程中需要用到微分中值公式和 Бернштейн 不等式。

对于每个 n，由假设可知都有不高于 n 阶的三角多项式 $T_n(x)$ 使得 $|T_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{K}{n^\alpha}$。这表明于 $n\to\infty$ 时 $T_n(x)$ 是一致地趋向于 $f(x)$ 的，既然如此，倘令

$U_0(x)=T_1(x),\ U_n(x)=T_{2^n}(x)-T_{2^{n-1}}(x)\quad(n=1,\ 2,\cdots)$，

则 $\sum U_n(x)$ 便一致收敛于 $f(x)$，亦即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)。$$

下面来估计 $|f(x)-f(y)|(|x-y|\leqslant\delta)$，其中 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 为任意正数。令 m 选得如此大，使得 $2^{m-1}\leqslant\frac{1}{\delta}<2^m$。于是

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|U_n(x)-U_n(y)|\\&\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}|U_n(x)-U_n(y)|+\sum_{n=m}^{\infty}|U_n(x)|\\&\quad+\sum_{n=m}^{\infty}|U_n(y)|。\end{aligned}$$

显然关于 $|U_n(x)|$ 有如下的估计：

$$\begin{aligned}|U_n(x)|&\leqslant|T_{2^n}(x)-f(x)|+|f(x)-T_{2^{n-1}}(x)|\\&\leqslant\frac{K}{2^{n\alpha}}+\frac{K}{2^{(n-1)\alpha}}\\&=K\frac{(1+2^\alpha)}{2^{n\alpha}}。\end{aligned}$$

从而（注意公式(3.1)）

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty}|U_n(x)|&\leqslant A\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\alpha}\\&=A\left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha},\end{aligned}$$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}|U_n(x)-U_n(y)|+A\left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha}$$
$$=\sum_{n=0}^{m-1}U_n'(\xi)\,|x-y|+A\left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha}$$
$$\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}2^n\max|U_n(x)|\,\delta+A\left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha}$$
$$\leqslant A\delta\sum_{n=0}^{m-1}2^n\frac{1}{2^{n\alpha}}+A\left(\frac{1}{2}\right)^{m\alpha}。$$

注意 $\delta>2^{-m}$，因此由上列估计可知

$$\omega(\delta)\leqslant A\delta\sum_{n=0}^{m-1}2^{n(1-\alpha)}+A\delta^{\alpha}。\tag{4.2}$$

以下分别讨论 $\alpha<1$ 与 $\alpha=1$ 的情形。先设 $\alpha<1$。此时由于 $2^m<2/\delta$，故得

$$\sum_{n=0}^{m-1}2^{n(1-\alpha)}<\frac{2^{m(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}<A\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\alpha},$$

因而
$$\omega(\delta)\leqslant A\delta\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\alpha}+A\delta^{\alpha}=A\delta^{\alpha}。$$

这就表明 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$。

又若 $\alpha=1$，则估计式(4.2)变为

$$\omega(\delta)\leqslant A\delta m+A\delta。$$

既然 $2^{m+1}\leqslant\frac{1}{\delta}$，因此 $m-1\leqslant|\log\delta|/\log 2$，$m\leqslant 2(m-1)\leqslant A|\log\delta|$，从而

$$\omega(\delta)\leqslant A\delta|\log\delta|+A\delta\leqslant A\delta(|\log\delta|+1)。$$

这就表明 $f(x)\in W$。证毕。

试将此处所论证的定理 3 和 § 2 中的 Jackson 定理（推论 2）作一比较，即可看出为使函数 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$，必要充分条件是 $E_n^*\leqslant\frac{K}{n^{\alpha}}$。但当 $\alpha=1$ 时，该条件却只是必要而未必充分。事实上存在这样的函数 $f(x)$（例如可取 $f(x)=$

$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}\in C_{2\pi}\Big)$，它虽然满足条件 $E_n^*\leqslant\frac{K}{n}$，却未必是 $f(x)\in$ Lip 1。

Бернштейн 还建立了如下的定理：

定理 4 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，又设

$$E_n^*\leqslant\frac{K}{n^{p+\alpha}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots),$$

其中 p 为正整数，而 $0<\alpha\leqslant 1$。那末 $f(x)$ 必存在有连续的 p 阶微商 $f^{(p)}(x)$，并且当 $\alpha<1$ 时 $f^{(p)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$，而当 $\alpha=1$ 时 $f^{(p)}(x)\in W$。

定理 5 要使 $C_{2\pi}$ 中的函数 $f(x)$ 有任意阶微商的必要充分条件是，对于任意 p 都有

$$\lim_{n\to\infty}(n^p E_n^*)=0。$$

定理 4 的证明和前面定理的证法十分相似。令 $U_n(x)$ 的定义同前，则由 $|T_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{K}{n^{p+\alpha}}$ 出发，同样可得(常数记号 A 的用法仍按以前的约定)：

$$|U_n(x)|\leqslant\frac{K}{2^{n(p+\alpha)}}+\frac{K}{2^{(n-1)(p+\alpha)}}=\frac{A}{2^{np+n\alpha}}。$$

对 2^n 阶多项式 $U_n(x)$ 连续利用 p 次 Бернштейн 不等式(3.1)，可得

$$|U_n^{(p)}(x)|\leqslant(2^n)^p\frac{A}{2^{np+n\alpha}}=\frac{A}{2^{n\alpha}}。$$

于是依 Weierstrass 的 M 检验法可知微商级数 $\sum U_n^{(p)}(x)$ 一致收敛到和函数 $f(x)$ 的 p 级微商：

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(p)}(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)=f^{(p)}(x)。$$

最后只须判定 $f^{(p)}(x)$ 所属的函数类。显然

$$\left|f^{(p)}(x)-\sum_{n=0}^{m}U_n^{(p)}(x)\right|\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{A}{2^{n\alpha}}=\frac{A}{2^{m\alpha}}。$$

既然其中$\sum_0^m U_n^{(p)}(x)$是一个阶数不大于2^m的三角多项式，故用$E_n^{(p)}$表示$f^{(p)}(x)$的最佳逼近时，将有

$$E_{2^m}^{(p)}\leqslant\frac{A}{2^{m\alpha}}\quad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)。$$

对于每一个正整数$n>2$，总可选m使得$2^m\leqslant n<2^{m+1}$，因而总有

$$E_n^{(p)}\leqslant E_{2^m}^{(p)}\leqslant\frac{A}{2^{m\alpha}}<\frac{A}{2^{(m+1)\alpha}}=\frac{A}{n^\alpha}。$$

于是根据定理3便可作出关于$f^{(p)}(x)$所属函数类的结论。

对于定理5，我们在这里不准备给出它的全部证明，只就定理中所述条件的充分性予以验证。在定理条件之下，可知对一切足够大的n(例如$n>N_p$)，总有

$$n^{p+1}E_n^*<1。$$

因N_p为有限数，故在诸数

$$E_1^*,\ 2^{p+1}E_2^*,\cdots,\ N_p^{p+1}E_{N_p}^*,\ 1$$

中必可选一最大者，例如记最大数为K_p。于是

$$E_n^*\leqslant K_p\frac{1}{n^{p+1}}$$

便对一切n都成立。如此，根据定理2便得知$f(x)$具有连续的p阶微商。又由于p的任意性便得知定理为真。

我们已经知道，满足条件$E_n^*<\frac{K}{n}$的以2π为周期的函数未必属于Lip 1类。因此自然产生这样的问题：由条件$E_n^*<\frac{K}{n}$所界定的类究竟是怎样的函数类？这个问题是由A. Zygmund在他1945年的一个工作中所解决的。他发理要

寻找的函数类，即下述的

Z 类：类中的元素 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，并且有这样的常数 K 使得对一切 x 及一切 $h>0$ 都满足如下的条件：

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Kh。\qquad (4.3)$$

定理 6(Zygmund)　函数 $f(x)$ 属于 Z 类的必要与充分条件是 $E_n^*<\frac{A_0}{n}$ $(n=1, 2, 3,\cdots)$，A_0 为某一常数。

【证】　所用的工具主要是 Бернштейн 不等式 (3.1) 和如下的 Jackson 奇异积分(见 § 2)：

$$I_n(x)=\frac{3}{2n\pi(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right]^4 dt。$$

仿 § 2 中定理 1 的证法，利用核函数的偶性，可得

$$\begin{aligned}&I_n(x)-f(x)\\&=\frac{3}{n\pi(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-2f(x)\\&\quad+f(x-2t)]\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^4 dt。\end{aligned}$$

先证条件的必要性。假设 $f(x)\in Z$，则

$$|I_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{6K}{n\pi(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^4 dt。$$

因而仿 § 2 中定理 1 的证法，可得估值(A 表如前约定的常数)：

$$|I_n(x)-f(x)|\leqslant A\frac{1}{n}。$$

既然 $I_n(x)$ 是一个阶数不高于 $2n-2$ 的三角多项式，因此上

式即表明 $E^*_{2n-2}\leqslant A\frac{1}{n}$。注意

$$E^*_{2n-1}\leqslant E^*_{2n-2}\leqslant A\frac{1}{n}\leqslant A\frac{1}{2n},$$

因此可知不论 n 为奇数还是偶数，都有 $E^*_n<A\frac{1}{n}$，故条件的必要性获得证明。

再证条件的充分性。假设定理中的条件为 $f(x)$ 所满足，仿定理 3 的证法引进 2^n 阶的三角多项式 $U_n(x)$，于是

$$|U_n(x)|\leqslant A\frac{1}{2^{n\alpha}}=A\frac{1}{2^n},$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)。$$

对于任意正整数 m 显然总是有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|U_n(x)|\leqslant A\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}=A\frac{1}{2^m}。$$

这就表明，对于任意 $h>0$ 都有

$$\begin{aligned}&|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\\&<\sum_{n=0}^{m-1}[U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)]+\frac{A}{2^m}。\end{aligned}$$

利用两次微分中值公式可得

$$\begin{aligned}&U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)\\&=hU'_n(\xi)-hU'_n(\eta)=h(\xi-\eta)U''_n(\zeta),\end{aligned}$$

其中 $x-h<\eta<\zeta<\xi<x+h$。于是再连用两次 Бернштейн 不等式(3.1)便得出如下的估值式：

$$\begin{aligned}&|U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)|\\&\leqslant 2h^2\max|U''_n(x)|\leqslant 2h^2(2^n)^2\max|U_n(x)|\\&\leqslant Ah^2 2^n,\end{aligned}$$

并由逐项相加得

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Ah^2 2^m+\frac{A}{2^m}。$$

到此为止m都是任意的，而且上式左端与m无关。因此我们总可适当选择m使得$2^{-m}\leqslant h<2^{1-m}$，从而

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant 2Ah+Ah\leqslant Ah。$$

这表明$f(x)\in Z$。证明了条件的充分性。

注记 Zygmund 定理实质上可以看作是对 Бернштейн 定理的补充，或者看作是关于$\alpha=1$的那个情况的精确化。事实上，函数类Z是介于 Lip1 与交集$WC_{2\pi}$之间：

$$\mathrm{Lip}\,1\subset Z\subset WC_{2\pi}。$$

还可以举例说明Z是交集$WC_{2\pi}$的一个真子集。详细讨论留给感兴趣的读者自己去作。

§5. 函数的最佳逼近与诱导函数的最佳逼近之间的关系

要研究非周期性函数的结构性质与函数的代数多项式逼近阶之间的联系，最简单的办法就是先通过变数代换法把被逼近的函数转变成三角函数，然后用三角多项式来进行逼近（这时即可应用§2，§4中的理论），最后再把三角多项式转变成代数多项式。

现在我们就根据上述想法来进行具体分析。假设$f(x)$是定义在闭区间$[a, b]$上的一个连续函数。通过变数代换

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)],$$

显然就将x的区间$a\leqslant x\leqslant b$变换成t的区间$-1\leqslant t\leqslant 1$，同时得到t的函数

$$\varphi(t)=f\left(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right)。$$

既然$-1\leqslant t\leqslant 1$，故又可作变数代换$t=\cos\theta$而$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，这

样便得到一个三角函数

$$\psi(\theta)\equiv\varphi(\cos\theta)。$$

由于 $\cos\theta$ 是 θ 的偶性周期函数，故可将 $\psi(\theta)$ 按照 $\psi(\theta)=\psi(-\theta)$ 与 $\psi(\theta)=\psi(\theta+2\pi)$ 而延拓成为 $(-\infty, \infty)$ 上的偶性周期函数。

如上得出的 $\psi(\theta)$ 称为原始函数 $f(x)$ 的诱导函数。利用此种诱导函数即可讨论代数多项式的最佳逼近和三角多项式的最佳逼近之间的关系。

命题 1 设 E_n 是函数 $f(x)\in C[a, b]$ 的用不高于 n 次的代数多项式的最佳逼近，而 E_n^* 是它的诱导函数 $\psi(\theta)$ 用阶数不高于 n 的三角多项式的最佳逼近，那末 $E_n=E_n^*$。

【证】 对 $f(x)$ 而言恒有最小偏差多项式 $P(x)=\sum\limits_0^n a_kx^k$，使得

$$|f(x)-P(x)|\leqslant E_n。\tag{5.1}$$

易见 $P(x)$ 的诱导函数 $T(\theta)$ 必定是阶数不高于 n 的三角多项式。因此不等式(5.1)转变为

$$|\psi(\theta)-T(\theta)|\leqslant E_n。$$

由此推出 $E_n^*\leqslant E_n$。

反之，对偶函数 $\psi(\theta)$ 而言将有最小偏差多项式（偶性三角多项式）$T(\theta)=\sum\limits_0^n a_k\cos k\theta=\sum\limits_0^n c_k\cos^k\theta$，使得

$$|\psi(\theta)-T(\theta)|\leqslant E_n^*。\tag{5.2}$$

显然由 $\psi(\theta)\equiv\varphi(\cos\theta)=\varphi(t)$ 可知(5.2)式相当于

$$\left|\varphi(t)-\sum_0^n c_kt^k\right|\leqslant E_n^*。$$

最后再根据变数代换 $x=\dfrac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)]$ 便变成

$$|f(x)-P(x)|\leqslant E_n^*,$$

其中 $P(x)$ 的次数自然不高于 n，由此又推出 $E_n\leqslant E_n^*$。

命题 2 设 $\omega_f(\delta)$，$\omega_\psi(\delta)$ 分别表示函数 $f(x)$ 与诱导函数 $\psi(\theta)$ 的连续模数，则

$$\omega_\psi(\delta)\leqslant\omega_f\left(\frac{1}{2}(b-a)\delta\right)。$$

【证】 由微分中值公式易知 $|\cos\theta_1-\cos\theta_2|\leqslant|\theta_1-\theta_2|$。因此当 $|\theta_1-\theta_2|\leqslant\delta$ 时可得估值式

$$\begin{aligned}
&|\psi(\theta_1)-\psi(\theta_2)|\\
&=|\varphi(\cos\theta_1)-\varphi(\cos\theta_2)|\\
&\leqslant\omega_\varphi(|\cos\theta_1-\cos\theta_2|)\leqslant\omega_\varphi(|\theta_1-\theta_2|)\leqslant\omega_\varphi(\delta)\\
&=\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}\left|f\left(\frac{(b-a)t_1+(b+a)}{2}\right)-f\left(\frac{(b-a)t_2+(b+a)}{2}\right)\right|\\
&\leqslant\omega_f\left(\frac{1}{2}(b-a)\delta\right)。
\end{aligned}$$

命题 3 设 $[\alpha,\ \beta]$ 是整个包含在 $(a,\ b)$ 内的闭区间，而 $\tilde{\omega}_f(\delta)$ 表示 $f(x)$ 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上的连续模数。则存在一个仅依赖于区间 $(a,\ b)$ 及 $[\alpha,\ \beta]$ 的正常数 k 使得

$$\tilde{\omega}_f(\delta)\leqslant\omega_\psi(k\delta)。$$

【证】 注意变数代换 $x=\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)]$ 等价于

$$t=\frac{2x-(b+a)}{b-a}。$$

在此变换下 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 显然被变换成 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$，而

$$\tau_1=\frac{2\alpha-(b+a)}{b-a},\quad \tau_2=\frac{2\beta-(b+a)}{b-a}。$$

自然 $[\tau_1,\ \tau_2]$ 整个含于 $(-1,\ 1)$ 内，亦即

$$\lambda=\min\{\tau_1+1,\ 1-\tau_2\}>0。$$

记 $x_i=\frac{1}{2}[(b-a)t_i+(b+a)]=\frac{1}{2}[(b-a)\cos\theta_i+(b+a)]$, $i=1, 2$, 于是不等式 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 显然相当于

$$|t_1-t_2|\leqslant\frac{2}{b-a}\delta。$$

因 $\theta=\arccos t$, 故由微分中值公式易得

$$|\theta_1-\theta_2|=|\arccos t_1-\arccos t_2|=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}|t_1-t_2|,$$

其中 t_1, t_2 均在 $[\tau_1, \tau_2]$ 内而 ξ 系介于 t_1 与 t_2 之间, 自然是 $(1-\xi^2)=(1-\xi)(1+\xi)\geqslant\lambda^2$。因而

$$|\theta_1-\theta_2|\leqslant\frac{1}{\lambda}|t_1-t_2|\leqslant\frac{2}{\lambda(b-a)}\delta。$$

我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\psi(\theta_1)-\psi(\theta_2)|\leqslant\omega_\psi(|\theta_1-\theta_2|)$$
$$\leqslant\omega_\psi\left(\frac{2}{\lambda(b-a)}\delta\right)。$$

这就证明了 $\omega_f(\delta)\leqslant\omega_\psi(k\delta)$, 其中 $k=\frac{2}{\lambda(b-a)}$。

§6. 代数多项式逼近理论中的 Jackson 定理与 Бернштейн 定理

有了 §5 中的内容作准备, 我们便不难根据三角多项式逼近论中的 Jackson 定理与 Бернштейн 定理(定理 1~6) 去导出代数多项式逼近论中的相应命题。例如我们有

定理 7 (Jackson) 设 E_n 是函数 $f(x)\in C[a, b]$ 用 H_n 中的多项式所得的最佳逼近, 那末

$$E_n\leqslant K\omega_f\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 K 为一正常数, 仅与 a, b 有关。

【证】 令 $\psi(\theta)$ 表 $f(x)$ 的诱导函数。根据 §5 中命题 1 及 2 并利用 §2 中的定理 2 易知

$$E_n = E_n^* \leqslant A\omega_\psi\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant A\omega_f\left(\frac{b-a}{2n}\right) \leqslant K\omega_f\left(\frac{1}{n}\right)。$$

定理于是得证。

推论 1 设 $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha\ (0<\alpha\leqslant 1)$，则

$$E_n \leqslant KM\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha。$$

推论 2 设 $f(x)$ 有微商 $f'(x)$ 且 $|f'(x)| \leqslant M$，则

$$E_n \leqslant KM\frac{1}{n}。$$

如果用 $\omega^{(p)}(\delta)$ 表示 p 阶微商 $f^{(p)}(x)$ 的连续模数，那末还有如下的一个更一般的结果：

定理 8(Jackson) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 p 阶连续微商，那末当 $n>p$ 时恒有估值式

$$E_n \leqslant A_p\left(\frac{1}{n}\right)^p \omega^{(p)}\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

其中 A_p 是一个仅依赖于 a, b 与 p 的正常数。

为证明上述定理，先证明下面的

引理 2 若 $f(x)$ 具有连续微商 $f'(x)$，则 $f(x)$ 的最佳逼近 $E_n \equiv E_n(f)$ 与其微商的最佳逼近 $E'_{n-1} \equiv E_{n-1}(f')$ 之间必存在如下的关系式：

$$E_n \leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)E'_{n-1}。$$

【证】 令 $P(x)$ 是 $f'(x)$ 的最佳逼近多项式，次数为 $n-1$。那末 $|f'(x)-P(x)| \leqslant E'_{n-1}$。令 $\varphi(x) = f(x) - \int_0^x P(x)dx$，则 $\varphi'(x) = f'(x) - P(x)$，从而有不等式 $|\varphi'(x)| \leqslant E'_{n-1}$。如是利用定理 7 的推论 2 便推出

$$E_n(\varphi)\leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)E'_{n-1}。$$

因之，若 $Q(x)\in H_n$ 是 $\varphi(x)$ 的最佳逼近多项式，则

$$|\varphi(x)-Q(x)|=\left|f(x)-\int_0^x P(x)dx-Q(x)\right|\leqslant\frac{A}{n}E'_{n-1}。$$

注意 $\int_0^x P(x)dx+Q(x)$ 为 H_n 中的多项式，故由上式可知引理的结论成立。

【定理 8 的证明】 相继应用引理中的不等式，得出（常数符号 A 在各次出现中不必代表同一值）

$$E_n\leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)E'_{n-1}\leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)E''_{n-2}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{1}{n-p+1}\right)E^{(p)}_{n-p}$$

$$\leqslant A\left(\frac{1}{n}\right)^p E^{(p)}_{n-p}。\tag{6.1}$$

再根据上述 Jackson 第一定理的证明，可知有

$$E^{(p)}_{n-p}\leqslant A\omega^{(p)}\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right)。$$

以此代入不等式(6.1)的最后一项，便证明了定理 8 中的估值式。

进一步，我们来建立定理 7 之推论 1 的逆定理，即

定理 9 (Бернштейн) 设函数 $f(x)\in C[a, b]$ 的最佳逼近 E_n 满足不等式

$$E_n\leqslant\frac{A}{n^\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1)。$$

令 $[a_1, b_1]$ 为整个含于 (a, b) 内的一个闭区间。那末当 $\alpha<1$ 时，$f(x)$ 在该闭区间上恒属于 Lipα 类；当 $\alpha=1$ 时，$f(x)$ 在该闭区间上便属于 W 类。

【证】 令 $\psi(\theta)$ 表 $f(x)$ 的诱导函数，则

$$E_n(f)=E_n^*(\psi)\leqslant\frac{A}{n^\alpha}。$$

因而由 § 4 中的定理 3 知道，当 $\alpha<1$ 时 $\psi(\theta)\in \text{Lip}_M\,\alpha$ 而当 $\alpha=1$ 时 $\psi(\theta)\in W$。

由 § 5 中的命题 3 知道，在区间 $[a_1, b_1]$ 上恒有 $\tilde{\omega}_f(\delta)<\omega_\psi(k\delta)$。因此再根据连续模数的性质 5°(§ 1) 以及 W 类的定义，可知当 $\alpha<1$ 时将有

$$\tilde{\omega}_f(\delta)\leqslant\omega_\psi(k\delta)\leqslant Mk^\alpha\delta^\alpha。$$

这表明 $f(x)$ 属于具有系数 Mk^α 的 $\text{Lip}\,\alpha$ 类，又当 $\alpha=1$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_f(\delta)&\leqslant\omega_\psi(k\delta)\leqslant Mk\delta(1+|\log k\delta|)\\&\leqslant Mk(1+|\log k|)\delta(1+|\log\delta|)。\end{aligned}$$

故此时 $f(x)$ 属于函数类 W。

定理 10(Бернштейн) 设 p 为正整数而 $f(x)\in C[a, b]$，并且

$$E_n\leqslant\frac{A}{n^{p+\alpha}}\quad(0<\alpha\leqslant1),$$

那末 p 阶微商 $f^{(p)}(x)$ 在开区间 (a, b) 内处处存在，并且当 $\alpha<1$ 时 $f^{(p)}(x)$ 在包含于 (a, b) 内的任何闭区间 $[a_1, b_1]$ 上恒属于 $\text{Lip}\,\alpha$ 类；而当 $\alpha=1$ 时属于 W 类。

这个定理可以利用 Бернштейн 第二不等式的那条推论 (§ 3) 来证明，这里便不去细说了。

最后要着重指出，将 Бернштейн 的一系列定理和 Jackson 的定理联系起来（包括 Zygmund 定理），可以看出 $C_{2\pi}$ 与 $C[a, b]$ 中的函数正好能够按照它们的最佳逼近的递减速度来进行分类，例如分成 $\text{Lip}\,\alpha(0<\alpha<1)$ 类，Z 类，高次可微函数类等等。

§7. 作为逼近工具的 Fourier 级数

本节讨论用由 Fourier 级数的部分和作成的三角多项式来逼近 $C_{2\pi}$ 中的函数问题。我们将证明 Lebesgue 的一条定理；由该定理可以看出，Fourier 级数的部分和在作为函数的逼近工具时，确实要比最佳逼近多项式差一些，但它所给出的逼近阶却和最佳逼近仅有极微小的差别。

记 $f(x)\in C_{2\pi}$，并假设有 Fourier 展开

$$f(x)\sim A+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{7.1}$$

其中的系数 A, a_k, b_k 按下式确定：

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\quad(k=1,\ 2,\ 3,\cdots)。\tag{7.2}$$

显然，如果 $f(x)$ 是一个 n 次三角多项式，则它的 Fourier 展开就是该三角多项式本身。

设 $S_n[f]\equiv S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和：

$$S_n[f]=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)。$$

由数学分析我们知道上述的部分和可以表示成如下的所谓 Dirichlet 积分：

$$S_n[f]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt。$$

因此要研究 $S_n[f]$ 对 $f(x)$ 的逼近速度，只需考察 Dirichlet 积分收敛于 $f(x)$ 的速度即可。为此，先证明

引理 3 对于任何正整数 $n\geqslant2$，成立着不等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt<\frac{1}{2}(2+\log n)。$$

【证】 首先由数学归纳法，易证

$$|\sin nt|\leqslant n|\sin t|\quad (-\infty<t<\infty)。$$

事实上，当 $n=k$ 成立时，由于

$$|\sin(k+1)t|\leqslant|\sin kt\cdot\cos t|+|\cos kt\cdot\sin t|$$
$$\leqslant|\sin kt|+|\sin t|\leqslant(k+1)|\sin t|,$$

故 $n=k+1$ 时亦成立。其次由函数 $\frac{\sin t}{t}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的单调下降性易推出

$$\frac{\sin t}{t}\geqslant\left(\frac{\sin t}{t}\right)_{t=\frac{\pi}{2}}\quad 或\quad \sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)。$$

于是将引理中的积分分裂成 $\left[0,\frac{\pi}{4n+2}\right]$ 与 $\left[\frac{\pi}{4n+2},\frac{\pi}{2}\right]$ 两个区间上的积分，便得出

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4n+2}}(2n+1)dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\pi/2}\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{2}\Big/\frac{\pi}{4n+2}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log en$$
$$=1+\frac{1}{2}\log n。$$

这就证明了引理中的不等式。

根据所证引理便可导出

定理 11(Lebesgue, 1909) 若函数 $f(x)$ 用 H_n^* 中的三角多项式所得的最佳逼近为 E_n^*，则对一切 x 及一切 $n\geqslant2$ 有

$$|S_n[f]-f(x)|\leqslant(3+\log n)E_n^*。$$

【证】 对于任意连续函数 $g(x)$，记 $\|g\|=\max|g(x)|$。于是由 Dirichlet 积分及引理 3 易知

$$|S_n[f]|\leqslant\|f\|(2+\log n)。$$

令 $T(x)\in H_n^*$ 为对 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，注意 $T(x)$ 的 Fourier 展开等于其本身，故有 $S_n[T]\equiv T(x)$，并因此

$$\begin{aligned}|S_n[f]-f(x)| &\leqslant |S_n[f]-T(x)|+|T(x)-f(x)| \\ &\leqslant |S_n[f-T]|+E_n^* \\ &\leqslant \|f-T\|(2+\log n)+E_n^* \\ &=(3+\log n)E_n^*。\end{aligned}$$

这就证明了定理中的不等式。

由 Lebesgue 定理可知当 $\lim\limits_{n\to\infty}(E_n^*\log n)=0$ 时，部分和 $S_n[f]$ 一致收敛到 $f(x)$。亦即此时 $f(x)$ 可展成一致收敛的 Fourier 级数。又根据三角逼近论中的 Jackson 基本定理(§2)，我们知道 $E_n^*\leqslant E\omega\left(\frac{1}{n}\right)$。因此只要 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$ $(n\to\infty)$，也就保证了 $f(x)$ 的 Fourier 级数的一致收敛性。这就是下面的

推论 保证 $f(x)$ 能展成一致收敛的 Fourier 级数的充分条件是

$$\lim_{\delta\to 0}[\omega_f(\delta)\log\delta]=0。$$

这就是著名的 Lipschitz-Dini 条件。

显然 Lebesgue 定理中的不等式可以改写成

$$|S_n[f]-f(x)|\leqslant K\log n\cdot E_n^* \quad (n=2,3,\cdots),$$

其中 K 为一绝对常数。我们知道 $\log n$ 虽然随着 n 的增大而增大，但和 n^ε($\varepsilon>0$ 为任意小的数)比较起来毕竟缓慢得多。亦即 $\log n=o(n^\varepsilon)$ $(n\to\infty)$。因此可以认为部分和 $S_n[f]$ 比之 $f(x)$ 的 n 阶的最佳逼近三角多项式并不坏得太过分。

§8. 作为逼近工具的 Fejér 和

我们知道，函数 $f(x)\in C_{2\pi}$ 的 Fourier 级数的部分和

$S_n[f]$ 本身可能不收敛于该函数。但是将部分和经过平均之后得到的 Fejér 和

$$\sigma_n(x) \equiv \sigma_n[f] = \frac{S_0[f] + S_1[f] + \cdots + S_{n-1}[f]}{n}$$

却恒能一致收敛到 $f(x)$。这就是通常数学分析教程中讲到的 Fejér 定理。既然 Fejér 和 $\sigma_n(\cdot)$ 仍然是三角多项式而且恒具有收敛性，这就使人想到，作为函数的逼近工具，在某种场合 $\sigma_n[f]$ 对函数 $f(x)$ 的逼近速度可能要比 $S_n[f]$ 快一些。下面要讲述的 Бернштейн 的一个结果，表明上述猜想确实是正确的。

由 $S_k[f]$ 的积分表达式(Dirichlet 积分)可得出

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t\right]dt. \tag{8.1}$$

又因为 $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$，所以

$$2\sin t\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos 2kt - \cos 2(k+1)t)$$

$$= 1 - \cos 2nt = 2\sin^2 nt。$$

由上面的推导得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}。$$

由此及(8.1)式有

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^2 dt。$$

由于 $S_k[1]=1$，故对特例 $f(x)\equiv 1$ 而言自然有

$$1 = \sigma_n[1] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2} 2\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^2 dt。$$

因此

$$\sigma_n[f]-f(x)$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]\left[\frac{\sin nt}{\sin t}\right]^2dt_{\circ}$$

现在我们来证明

定理 12 (Бернштейн, 1912) 若 $f(x)\in C_{2\pi}$, 并且 $f(x)\in\mathrm{Lip}_M\alpha$, 其中 $0<\alpha<1$。那末对于一切 x 成立着估值式

$$|\sigma_n[f]-f(x)|<\frac{AM}{n^\alpha},\tag{8.2}$$

此处 A 是一个仅依赖于 α 的常数。

【证】 既然 $f(x)\in\mathrm{Lip}_M\alpha$, 故

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\leqslant 2M(2t)^\alpha_{\circ}$$

再注意 $\sin^2 t\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^2t^2\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 因此代入化简得

$$|\sigma_n[f]-f(x)|\leqslant\frac{\pi M}{n2^{1-\alpha}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}}dt$$
$$=\frac{\pi Mn^{1-\alpha}}{n2^{1-\alpha}}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du$$
$$<A'\frac{M}{n^\alpha}\int_0^\infty\frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du=\frac{AM}{n^\alpha}_{\circ}$$

这便是所要证明的不等式(8.2)。

将此处定理中的估值式和 Jackson 基本定理推论 2(§ 2) 中的估计式作一比较, 可知就整个 $\mathrm{Lip}_M\alpha$ 类 $(0<\alpha<1)$ 中的全体周期连续函数而言, Fejér 和所给出的偏差估计恰好与最小偏差 E_n^* 的估计有着同样的阶(当然这并不排除对应个别的函数 E_n^* 具有更快下降速度的可能性), 然而在另一方面, 根据 Lebesgue 定理 (§ 7) 看来, Fourier 级数部分和 $S_n[f]$ 对于 $\mathrm{Lip}_M\alpha$ 中被逼近函数的偏差估计却只能是 $A\log n\cdot\frac{1}{n^\alpha}$。换句话说, 这里需要多出一个无限增大的因子 $\log n$。

第三章习题

1. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处可微，且 $|f'(x)|\leqslant M$。试证明 $f(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$。

2. 对有限区间 (a, b) 而言，试证明当 $\alpha<\beta$ 时恒有 $\mathrm{Lip}\,\beta\subset \mathrm{Lip}\,\alpha$。

3. 假设函数 $K_n(t, x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 定义于方形区域 $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant x\leqslant b$ 上，对于每个固定的 x 值，它是 t 的可积函数(Riemann 可积或 Lebesgue 可积)，并且当 $a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant b$ 时恒有

$$\int_\alpha^\beta K_n(t, x)dt \xrightarrow{1} 1^{*)} \quad (n\to\infty), \qquad (*)$$

那末 $K_n(t, x)$ 便称为一个核，而具有形式

$$\Phi_n(x)=\int_a^b K_n(t, x)f(t)dt$$

的积分称为奇异积分。试证明：当 $K_n(t, x)>0$，并且 $(*)$ 对 (a, b) 内任意闭子区间 $[\alpha, \beta]$ 上之一切 x 值一致成立时，则任一连续函数 $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的奇异积分 $\Phi_n(x)$ 必一致地收敛于 $f(x)$，亦即

$$\Phi_n(x)\xrightarrow{1} f(x) \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)。$$

4. 试证 Weierstrass 积分

$$W_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}\int_a^b e^{-n(t-x)^2}f(t)dt$$

是一个奇异积分，而 x 是山峰函数 $\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}e^{-n(t-x)^2}$ 的奇点。

5. 试证 Fejér 积分

$$F_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}n(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 f(t)dt$$

是一个奇异积分，而 x 是其中的正性核的奇点。

6. 试证 Vallée-Poussin 积分

$$V_n(x)=\frac{\sqrt{n\pi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right)f(t)dt$$

---

*) 此处符号"$\xrightarrow{1}$"表示左端一致收敛于右端(当 $n\to\infty$ 时)，以下同。

是一个奇异积分，而x是其中的正性核的奇点。

7．试证 Landau 积分

$$L_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^1[1-(t-x)^2]^n f(t)dt$$

是一个奇异积分，而x是其中的正性核的奇点。

8．试证明作为奇异和的 Бернштейн 多项式 $B_n^f(x)$ 中的正性核 $\lambda_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(0\leqslant k\leqslant n)$ 在 $k\approx nx(0<x<1)$ 处达到最大值，因而以 $t_k^{(n)}=\frac{k}{n}$ 为不连续变量的该山峰函数具有奇点x。

9．试证明作为奇异和的 Канторович 多项式

$$K_n(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)}f(t)dt$$

于 $n\to\infty$ 时收敛于连续函数 $f(x)(0<x<1)$。

［提示］ 与 Бернштейн 多项式序列的收敛性的证法完全相似。

10．试证明作为奇异和的 Landau 多项式

$$L_n^*(x)=\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\left[1-\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]^n$$

于 $n\to\infty$ 时收敛于连续函数 $f(x)(0<x<1)$，并且在任何闭区间 $0<\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 上是一致收敛的。

［提示］ 考虑奇异积分或奇异和（或奇异级数）的收敛性时，总是在围绕着核函数的奇点附近将积分或和式分裂成两个或三个组成部分来分别进行估计。例如就 $L_n^*(x)$而言，很象处理 $B_n^f(x)$的收敛性那样，可以取定一个 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{1}{4}\right)$，将它的加式 $\sum_{k=0}^{n}$ 分裂成如下的两个部分：

$$\sum_{k=0}^{n}=\Sigma_{(i)}+\Sigma_{(ii)},$$

其中 $\Sigma_{(i)}$ 与 $\Sigma_{(ii)}$ 分别表示对合于下列条件的一切整数 $k(0\leqslant k\leqslant n)$取和：

$$\text{(i)}\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon},\qquad \text{(ii)}\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}。$$

至于详细的分析证明，可以参考第一章 § 1 中的 Бернштейн 证法。

11．就题 10 中的 Landau 多项式，试证明当 $f(x)\in C[0,1]$ 时估计式

$$|L_n^*(x)-f(x)|\leqslant 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{C}{\sqrt{n}}$$

对于每个 $x(\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta)$ 及一切充分大的 n 都成立，其中正常数 C 依赖于指定正数 $\delta\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ 而与 n 无关。

12．试证明对 $[0,\infty)$ 上的有界连续函数 $f(x)$，奇异级数

$$S_n(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

在任何有限区间 $[0,a]$ 上恒一致收敛于 $f(x)$。

［提示］ 以 $t_k^{(n)}=\frac{k}{n}$ 为变量的山峰函数 $\varphi(t_k^{(n)})=e^{-nx}\cdot\frac{(nx)^k}{k!}$ 具有奇点 x。因此只要围绕奇点 x 将该奇异级数 $\sum_0^{\infty}$ 适当地分裂成三个加式，再分别加以分析估计即得。

第四章　线性正算子逼近

函数逼近论与泛函分析有着密切的联系。事实上，前面几章中所介绍的用代数多项式或三角多项式逼近给定函数的具体工具（例如，内插多项式，Бернштейн 多项式，Landau 多项式，Fourier 级数部分和，Fejér 和，等等）都是些线性算子。换言之，若 $L(f;x)$ 为上面所列举的逼近工具之一，又令 a 与 b 为任何实数，而 $f(t)$ 与 $\varphi(t)$ 为属于算子 $L(f;x)$ 存在域的函数，则

$$L(af+b\varphi;x)=aL(f;x)+bL(\varphi;x)。$$

这些著名的逼近工具有如此重要的共性，自然启示我们可以在研究泛函分析某些概念的同时来研究函数逼近理论。下面就来介绍苏联学者 П. П. Коровкин 著名著作（Линейные операторы и теория приближений，有中译本）中的一些典型结果。

§1. 线性正泛函

现在我们考虑对函数所施行的某些运算，它们导致泛函数的概念。

1．令 $M(f)=\sup\limits_{0<x<1}|f(x)|$。量 $M(f)$ 与微积分中的函数概念之间有什么共同之处，又有什么不同之处？

量 $M(f)$ 不是独立变量。例如，若 $f_1(x)=\sin 2\pi x$，$f_2(x)=3x^2+1$，则 $M(f_1)=1$，$M(f_2)=4$。微积分中的函数也不是独立变量。量 $M(f)$ 与函数间的差别不是很实质的。它们的差别仅在于这些量的变元的性质相异。点（数）是函数

的变元，而区间 $[0, 1]$ 上的有界函数是量 $M(f)$ 的变元。在区间 $[0, 1]$ 上有界的函数 $f(x)$ 所成的集 F 是量 $M(f)$ 的存在域。

2．设 $\psi(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数。令

$$I(f)=\int_a^b \psi(x)f(x)dx。$$

量 $I(f)$（其值依赖于 $f(x)$，而 $\psi(x)$ 是固定的函数）是确定于在区间 $[a, b]$ 上可积的函数 $f(x)$ 所成的集 F 上。

将上述例子一般化，我们来引进泛函数的概念。

定义 1 如果对给定集 F 的每一函数 $f(x)$，都有一个实数 Φ 与之对应，即 $\Phi=\Phi(f)$，则说在函数集 F 上定义了一个泛函数 $\Phi(f)$。集 F 称为泛函数的存在域。

由上述定义可以推出，泛函数与函数之间的不同点仅在于这些量的存在域不同：点集为函数的存在域，函数集为泛函数的存在域。这两个概念之间的其它差别是没有的。

定义 2 泛函数 $\Phi(f)$ 称为线性的，如果当函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都属于它的存在域时，$af(x)+b\varphi(x)$ 亦然，且有等式（线性关系式）

$$\Phi(af+b\varphi)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)$$

成立，其中 a, b 为任意两实数。

例 1 $\Phi(f)=Af(\alpha)$。

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于 $x=\alpha$ 有定义的函数 $f(x)$ 所成的集合 F 上有意义。它的线性可由下列等式推得：

$$\begin{aligned}\Phi(af+b\varphi)&=A(af(\alpha)+b\varphi(\alpha))=aAf(\alpha)+bA\varphi(\alpha)\\&=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)。\end{aligned}$$

例 2 $\Phi(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$，

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于诸点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上有定义的函

数 $f(x)$所成的集合 F 上有意义。由等式

$$\begin{aligned}\Phi(af+b\varphi)&=\sum_{k=1}^{n}A_k(af(x_k)+b\varphi(x_k))\\&=a\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)+b\sum_{k=1}^{n}A_k\varphi(x_k)\\&=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)\end{aligned}$$

推出其线性。

例 3 $\Phi(f)=\int_\alpha^\beta\psi(x)f(x)dx$,

其中 $\psi(x)$在$[\alpha, \beta]$上连续。泛函数的线性可由等式

$$\begin{aligned}\Phi(af+b\varphi)&=\int_\alpha^\beta\psi(x)(af(x)+b\varphi(x))dx\\&=a\int_\alpha^\beta\psi(x)f(x)dx+b\int_\alpha^\beta\psi(x)\varphi(x)dx\\&=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)\end{aligned}$$

推得。

定义 3 若对于每一个正函数$f(x)$(称不取负值的函数为正函数)都有 $\Phi(f)\geqslant 0$,则称线性泛函数 $\Phi(f)$ 为正的。

容易看出,线性正泛函数 $\Phi(f)$的值当其变元增大时不减小。其实,若$f_1(x)\geqslant f_2(x)$,则 $f_1(x)-f_2(x)\geqslant 0$,所以

$$0\leqslant\Phi(f_1-f_2)=\Phi(f_1)-\Phi(f_2)\quad 且\quad \Phi(f_1)\geqslant\Phi(f_2)。$$

由于这一情况我们可以说线性正泛函数是单调增大的。

例 1 若 $A\geqslant 0$,泛函数 $\Phi(f)=Af(a)$是正的。

例 2 若 $A_k\geqslant 0(k=1, 2,\cdots, n)$,泛函数

$$\Phi(f)=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$$

是正的。

例 3 设 $\psi(x)$在区间$[a, b]$上连续且 $\psi(x)\geqslant 0$, 则泛函数 $\Phi(f)=\int_a^b\psi(x)f(x)dx$ 是正的。

其实，若 $\psi(x_0)<0$, $a\leqslant x_0\leqslant b$, 则由于 $\psi(x)$ 是连续的，故有区间 $[\alpha, \beta]$ $(a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant b,\ \alpha<\beta)$ 使得于其上 $\psi(x)$ 是负的。现在令

$$f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 是正函数，但是

$$\Phi(f)=\int_a^b\psi(x)f(x)dx=\int_\alpha^\beta\psi(x)dx<0。$$

现在我们来研究线性正泛函数序列 $\{\Phi_n(f)\}$ 的收敛性，主要是研究在怎样的条件下对于一切于点 $x=\alpha$ 处连续并在实轴上有界的函数 $f(x)$，成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha)。\tag{1.1}$$

定理 1(Коровкин, 1953) 若线性正泛函数 $\Phi_n(f)$ 满足条件：

$$\Phi_n(1)\to1,\ \Phi_n(\psi)\to0\quad(n\to\infty),\tag{1.2}$$

其中 $\psi(x)=(x-\alpha)^2$, 则对于任何于点 $x=\alpha$ 处连续且在实轴上有界的函数 $f(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha)。\tag{1.3}$$

【证】 首先依对 $f(x)$ 的假设条件可得两个不等式。事实上，依有界性假定，得到

$$-2M<f(x)-f(\alpha)<2M;\tag{1.4}$$

而依函数在点 $x=\alpha$ 处的连续性，当 $|x-\alpha|<\delta$ 时得到

$$-\varepsilon<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon。\tag{1.5}$$

由这些不等式可得不等式(对一切 x)

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}\psi(x)<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\psi(x)。\tag{1.6}$$

事实上，若 $|x-\alpha|<\delta$，则 (1.6) 式可由 (1.5) 式推出（注意 $\psi(x)=(x-\alpha)^2\geqslant 0$）；若 $|x-\alpha|\geqslant\delta$，则

$$\frac{2M}{\delta^2}\psi(x)\geqslant\frac{2M}{\delta^2}\delta^2=2M,$$

从而由(1.4)式推出(1.6)式（注意 $\varepsilon>0$）。

现在，利用不等式(1.6)以及线性正泛函数的单调性，得到

$$-\varepsilon\Phi_n(1)-\frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\psi)\leqslant\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)$$

$$\leqslant\varepsilon\Phi_n(1)+\frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\psi)。\tag{1.7}$$

依条件(1.2)，上述不等式右边趋于 ε 而左边趋于 $-\varepsilon$。由此有 N_ε，使得当 $n>N_\varepsilon$ 时，有

$$-2\varepsilon<\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)<2\varepsilon。$$

依 $\varepsilon>0$ 的任意性，$\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)\to 0$。最后，由于 $\Phi_n(1)\to 1$，所以 $\Phi_n(f)\to f(\alpha)$。证毕。

注记 1 定理中应假定函数 $f(x)$ 属于序列中一切泛函数的存在域，虽然在定理叙述中并未说明这一点。函数 $f(x)\equiv 1$ 与 $\psi(x)=(x-\alpha)^2$ 都属于这些存在域，虽然后者在实轴上是无界的。这一附注对下面的定理也都适用，为了叙述简便起见以后我们不再说明这一点。

注记 2 不等式(1.6)对应于古典的 Чебышев 不等式。

推论 若对于线性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$，下列三条件满足：

$$\Phi_n(1)\to 1,\ \Phi_n(x)\to\alpha,\ \Phi_n(x^2)\to\alpha^2,\tag{1.8}$$

则对于任何在实轴上有界并于点 $x=\alpha$ 处连续的函数 $f(x)$，序列 $\Phi_n(f)$ 收敛于 $f(\alpha)$。

【证】 令

$$\psi(x)=(x-\alpha)^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2,$$

由(1.8)推出

$$\Phi_n(\psi)=\Phi_n(x^2)-2\alpha\Phi_n(x)+\alpha^2\Phi_n(1)\to\alpha^2-2\alpha\cdot\alpha+\alpha^2\cdot 1=0,$$

亦即满足定理1的条件，从而推论得证。

定理2(Коровкин, 1953) 若线性正泛函数序列$\Phi_n(f)$满足条件：

$$\Phi_n(1)\to 1,\quad \Phi_n(\psi)\to 0, \tag{1.9}$$

其中$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}$，则对于以$2\pi$为周期，于$x=\alpha$处连续且有界的函数$f(x)$均有

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha)。$$

【证】 由于$f(x)$满足定理1中条件，故不等式(1.4)与(1.5)成立。今取一长为2π的半开区间$\alpha-\delta<x\leqslant 2\pi+\alpha-\delta$，则在这区间上不等式

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x)<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x) \tag{1.10}$$

成立。事实上，若$|x-\alpha|<\delta$，则因$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}\geqslant 0$，由不等式(1.5)便推出不等式(1.10)。若$\delta\leqslant x-\alpha\leqslant 2\pi-\delta$，则

$$\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{x-\alpha}{2}\leqslant\pi-\frac{\delta}{2},$$

因而
$$\sin\frac{x-\alpha}{2}\geqslant\sin\frac{\delta}{2},$$

$$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}\geqslant\sin^2\frac{\delta}{2},$$

$$\frac{2M\psi(x)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \geqslant 2M,$$

于是由于 $\varepsilon>0$, 从不等式(1.4)即可推出不等式(1.10)。

进一步, 还可以证明不等式(1.10)不仅对半开区间 $(\alpha-\delta,\ 2\pi+\alpha-\delta]$ 中的 x 是对的,而且对一切 x 均是对的。事实上,函数

$$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}=\frac{1-\cos(x-\alpha)}{2}$$

是以 2π 为周期的函数; 又依定理条件, 函数 $f(x)$ 也是以 2π 为周期的函数。因此

$$\psi(x+2k\pi)=\psi(x),\quad f(x+2k\pi)=f(x)$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)。$$

据此由不等式(1.10)得到

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x+2k\pi)$$
$$\leqslant f(x+2k\pi)-f(\alpha)\leqslant\varepsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x+2k\pi)。\tag{1.11}$$

但若 x 在半开区间 $(\alpha-\delta,\ 2\pi+\alpha-\delta]$ 中变动, 则 $x+2\pi$ 便在半开区间 $(2\pi+\alpha-\delta, 4\pi+\alpha-\delta]$ 中变动, $x+4\pi$ 在 $(4\pi+\alpha-\delta,\ 6\pi+\alpha-\delta]$ 中变动, 一般的 $x+2k\pi$ 在半开区间 $(2k\pi+\alpha-\delta,\ 2k\pi+2\pi+\alpha-\delta]$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 中变动。这些半开区间全体覆盖整个实轴无遗,因而由(1.11)式推知,对每一半开区间成立的不等式(1.10),对一切 x 均是成立的。

现在已经容易证明定理的结论。事实上, 利用不等式(1.10)与泛函数 $\Phi_n(f)$ 的单调性,可得到

$$-\varepsilon\Phi_n(1)-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Phi_n(\psi)\leqslant\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)$$

$$\leqslant\varepsilon\Phi_n(1)+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Phi_n(\psi)。$$

依(1.9)式，上述不等式右端趋于 ε 而左端趋于 $-\varepsilon$。因而有 N_ε，使得当 $n>N_\varepsilon$ 时，有

$$-2\varepsilon<\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)<2\varepsilon。$$

由于 ε 是任意的及 $\Phi_n(1)\to1$，可知 $\Phi_n(f)\to f(\alpha)$。

推论 若线性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$ 满足条件：

$$\Phi_n(1)\to1,\ \Phi_n(\cos x)\to\cos\alpha,\ \Phi_n(\sin x)\to\sin\alpha,\quad(1.12)$$

并且周期函数 $f(x)$ 于点 $x=\alpha$ 处连续且有界，则

$$\Phi_n(f)\to f(\alpha)。$$

【证】 令

$$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}=\frac{1-\cos(x-\alpha)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x)。$$

依(1.12)及 $\Phi_n(f)$ 的线性，有

$$\Phi_n(\psi)=\frac{1}{2}\{\Phi_n(1)-\cos\alpha\Phi_n(\cos x)-\sin\alpha\Phi_n(\sin x)\}$$

$$\to\frac{1}{2}(1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0。$$

可见定理 2 的条件满足，从而推论得证。

§2. 线性正算子

首先，我们用具体的例子引出与函数概念相近的算子概念。设 $\varphi(x,t)$ 对于集 E 中每一 x 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上关于 t 连续，则积分

$$L(f;x)=L(f(t);x)=\int_a^b \varphi(x,\ t)f(t)dt$$
$$=g(x) \tag{2.1}$$

对于每一在区间$[a,\ b]$上连续的函数$f(t)$都确定出一个函数$g(x)=L(f;\ x)$。此处$L(f;\ x)$与微积分中的函数$f(x)$相似，所差的只是变元与值的含意不同。函数的存在域与变化域为数集，而$L(f;\ x)$的存在域与变化域为函数集。

定义 1　设已知函数集F，如果对于集F中的每一函数$f(t)$，均有一个函数$\varphi(x)=H(f(t);\ x)$与之对应，则说在函数集F上定义了算子$H(f;x)=H(f(t)\ x)$。

定义 2　称算子$H(f;\ x)$是线性的，如果随着$f(t)$与$\varphi(t)$属于它的存在域，$af(t)+b\varphi(t)$(其中a与b为任意的实数)也属于它的存在域且成立如下等式：

$$H(af+b\varphi;x)=aH(f;x)+bH(\varphi;x)。$$

例 1　由(2.1)式定义的算子$L(f;x)$是线性的。

事实上，由下列等式即可推出算子$L(f;x)$的线性：

$$L(\alpha f_1+\beta f_2;x)=\int_a^b \varphi(x,\ t)(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t))dt$$
$$=\alpha\int_a^b \varphi(x,\ t)f_1(t)dt+\beta\int_a^b \varphi(x,\ t)f_2(t)dt$$
$$=\alpha L(f_1;x)+\beta L(f_2;x)。$$

例 2　设$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$为定义于集E上的函数。令

$$H(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)u_k(x),$$

其中$f(t)$为在实数集$t_1,\ t_2,\cdots,\ t_n$上有定义的函数。可以证明算子$H(f;x)$是线性的。

事实上

$$H(af+b\varphi;x)=\sum_{k=1}^{n}(af(t_k)+b\varphi(t_k))u_k(x)$$
$$=a\sum_{k=1}^{n}f(t_k)u_k(x)+b\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_k)u_k(x)$$
$$=aH(f;x)+bH(\varphi;x)。$$

定义 3 如果对于每一正函数 $f(t)$ 及 $x\in E$，线性算子 $L(f;x)$ 满足条件：$L(f;x)\geqslant 0$，则称 $L(f;x)$ 为集 E 上的线性正算子。

显然，对于每一固定的值 x，线性算子 $L(f;x)$ 成为线性泛函数。因此，如果对于集 E 中每一固定的值 x，线性泛函数均是正的，则线性算子 $L(f;x)$ 在集 E 上是正的。例如，当 $u_k(x)$ $(k=1, 2,\cdots, n)$ 在 E 上为正函数时，算子

$$L(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)u_k(x)$$

为集 E 上的线性正算子。又如，若 $\varphi(t, x)$ 对集 E 中每一固定的 x 在区间 $[a, b]$ 上关于 t 为连续的正函数，则算子

$$L(f;x)=\int_a^b \varphi(x, t)f(t)dt$$

在集 E 上是正的。

还须指出的是，在线性算子 $L(f;x)$ 中，变元 f 的变元与 x 不同，$L(f;x)=L(f(t);x)$。在计算算子 $L(f;x)$ 的值时我们将 x 当作常数（但为集 E 中任意的），因此等式

$$L(f(x);x)=f(x)L(1;x)$$

成立，这是由于 $f(x)$ 为常数（与 t 无关）。

现在我们来研究线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的条件。这里的 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，并且在整个实轴上有界。如在泛函数情形一样，我们将证明，序列 $L_n(f_k;x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f_k(x)=x^k$ $(k$

$=0, 1, 2$)蕴含序列 $L_n(f; x)$一致收敛于$f(x)$(如果$f(x)$满足上面指出的条件)。

下面将引进这一论断的一种证法，它是以闭区间上的连续函数必一致连续这个事实为基础的。先证明一个引理。

引理1 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，在点b为右连续，在点a为左连续，则对$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使得当$|y-x|<\delta$, $a\leqslant x\leqslant b$时，恒成立*)不等式

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon。$$

【证】 令$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}>0$。据函数$f(x)$在区间$a\leqslant x\leqslant b$上的一致连续性可以求出这样的$\delta_1>0$，使得当$|y-x|<\delta_1$, $a\leqslant x$, $y\leqslant b$时有不等式

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon'。\tag{2.2}$$

由于函数$f(x)$在点a连续（左连续是假定的，而右连续则是依函数在闭区间$[a, b]$上的连续性得知），所以对$\varepsilon'>0$有$\delta_2>0$，使得当$|y-a|<\delta_2$时

$$|f(y)-f(a)|<\varepsilon'。\tag{2.3}$$

同理有$\delta_3>0$，使得当$|y-b|<\delta_3$时

$$|f(y)-f(b)|<\varepsilon'。\tag{2.4}$$

今取$\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$并往证，当$|y-x|<\delta$, $a\leqslant x\leqslant b$时有

$$|f(y)-f(x)|<2\varepsilon'=\varepsilon。$$

事实上，若x与y均属于区间$[a, b]$，则后面的不等式由(2.2)

*) 这个引理与闭区间$[a, b]$上连续函数的一致连续性定理的区别是，后者假定x与y均属于区间$[a, b]$(函数只在这区间上定义)，但在引理中则假定x属于这个区间，而y则越出这个区间之外(但不太远)，亦即y位于开区间$a-\delta<y<b+\delta$之中。

推得。若 $y<a$（当然 x 必须属于区间 $[a, b]$），则 $|y-x|=|y-a|+|x-a|$，且由于 $|y-x|<\delta$，所以 $|y-a|<\delta$，$|x-a|<\delta$。现在得到

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&=|f(y)-f(a)+f(a)-f(x)|\\&\leqslant|f(y)-f(a)|+|f(x)-f(a)|。\end{aligned}$$

依(2.3)式不等式右边第一项小于 ε'；而依(2.2)式第二项也小于 ε'。从而

$$|f(y)-f(x)|<2\varepsilon'=\varepsilon。$$

如此已证明当 $y<a$ 时引理为真，对于 $y>b$ 的情形可以同样地证明。

§3. Коровкин 定理

现在我们给出线性正算子序列的收敛性定理。

定理 3(Коровкин, 1953) 设线性正算子序列 $L_n(f; x)$ 满足条件：

(1) $L_n(1; x)=1+\alpha_n(x)$，

(2) $L_n(t; x)=x+\beta_n(x)$，

(3) $L_n(t^2; x)=x^2+\gamma_n(x)$，

其中 $\alpha_n(x)$，$\beta_n(x)$，$\gamma_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零；又设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a, b]$ 上连续，于点 b 为右连续，于点 a 为左连续。则在区间 $[a, b]$ 上序列 $L_n(f; x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$。

【证】 由于函数 $f(t)$ 有界($-M<f(t)<M$)，所以对一切 x 与 t 均成立不等式

$$-2M<f(t)-f(x)<2M。\tag{3.1}$$

其次，依引理 1，对于 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$ 使得，当 $a\leqslant x\leqslant b$，$|t-x|<\delta$ 时，成立不等式

$$-\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon。\tag{3.2}$$

假定 $\psi(t)=(t-x)^2$(x 为区间$[a, b]$上的任意一点，且一经取好就固定了)，类似于定理 1 的证明可以得到

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t)-f(x) < \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\psi(t)。\tag{3.3}$$

由此再依算子 $L_n(f;\ x)$的线性与单调性得到(其中 x 为固定的，因而$f(x)$为常数)

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon L_n(1;x)-\frac{2M}{\delta^2}L_n(\psi;x)\\
&\quad\leqslant L_n(f;x)-L_n(f(x);x)=L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)\\
&\quad\leqslant \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n(\psi;x)。
\end{aligned}\tag{3.4}$$

现在我们可以断定，$L_n(\psi;x)$在区间$[a, b]$上一致收敛于零。事实上，由定理的条件与算子 $L_n(f;x)$的线性推出

$$\begin{aligned}
L_n(\psi;\ x)&=L_n(t^2-2tx+x^2;x)\\
&=L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\\
&=x^2+\gamma_n(x)-2x(x+\beta_n(x))+x^2(1+\alpha_n(x))\\
&=\gamma_n(x)-2x\beta_n(x)+x^2\alpha_n(x)=\delta_n(x),
\end{aligned}$$

其中 $\delta_n(x)$在区间$[a, b]$上一致收敛于零。

考虑到这一点及定理中第一个条件，便可断言不等式(3.4)右边在区间$[a, b]$上一致收敛于 ε，而左边一致收敛于$-\varepsilon$。

据此可以求出这样的序标 N_ε，使得当 $n>N_\varepsilon$, $a\leqslant x\leqslant b$ 时，成立不等式

$$-2\varepsilon < L_n(f;x)-f(x)L_n(1;\ x) < 2\varepsilon。$$

最后，依 ε 的任意性，序列

$$L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)$$

在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零，从而再依定理中第一个条件

便可断定序列 $L_n(f; x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 4 (Коровкин, 1953) 设线性正算子序列 $L_n(f; x)$ 满足条件:

(1) $L_n(1; x)=1+\alpha_n(x)$,

(2) $L_n(\cos t; x)=\cos x+\beta_n(x)$,

(3) $L_n(\sin t; x)=\sin x+\gamma_n(x)$,

其中 $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ 与 $\gamma_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零; 又设函数 $f(t)$ 有界且具有周期 2π, 在区间 $[a, b]$ 上连续, 于点 b 右连续, 于点 a 左连续。在上述条件下, 序列 $L_n(f; x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

【证】对于函数 $f(x)$, 定理 3 的条件满足, 因此不等式 (3.1) 与 (3.2) 正确, 其中第一个适于一切 x 与 t 的值而第二个受以下条件约束:

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad |t-x|<\delta。$$

对固定的 $x(a\leqslant x\leqslant b)$, 依这些不等式在定理 2 中我们曾证明不等式

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(t)<f(t)-f(x)<\varepsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(t), \tag{3.5}$$

其中 $\psi(t)=\sin^2\frac{t-x}{2}$, $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<t<\infty$。

由不等式 (3.5) 得到

$$\begin{aligned}&-\varepsilon L_n(1; x)-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n(\psi; x)\\&\leqslant L_n(f; x)-f(x)L_n(1; x)\\&\leqslant \varepsilon L_n(1; x)+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n(\psi; x)。\end{aligned}\tag{3.6}$$

但是 $\psi(t)=\frac{1}{2}(1-\cos x\cos t-\sin x\sin t)$。于是

$$
\begin{aligned}
&L_n(\psi;x)\\
&=\frac{1}{2}\{L_n(1;x)-\cos x L_n(\cos t;x)-\sin x L_n(\sin t;x)\}\\
&=\frac{1}{2}\{1+\alpha_n(x)-\cos^2 x-\cos x\beta_n(x)-\sin^2 x-\sin x\gamma_n(x)\}\\
&=\frac{1}{2}\{\alpha_n(x)-\beta_n(x)\cos x-\gamma_n(x)\sin x\}=\delta_n(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_n(x)$ 于区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零。依上述等式及定理条件可以推出，不等式(3.6)右边在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 ε，而左边一致收敛于 $-\varepsilon$。因此有 N_ε，使得当 $n>N_\varepsilon$，$a\leqslant x\leqslant b$ 时，有不等式

$$-2\varepsilon<L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)<2\varepsilon。$$

由此可以推出

$$L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)=\lambda_n(x),$$

其中 $\lambda_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零。从而并依定理条件得到

$$
\begin{aligned}
L_n(f;x)-f(x)&=\lambda_n(x)+f(x)\{L_n(1;x)-1\}\\
&=\lambda_n(x)+f(x)\alpha_n(x)=\nu_n(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\nu_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于零，于是序列 $L_n(f;x)$ 在这个区间上一致收敛于函数 $f(x)$。

注记 在定理 3 与定理 4 的证明过程中我们已经指明，如果序列 $L_n(1;\ x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上一致收敛于 1，而序列 $L_n(\psi;\ x)\left(在定理 3 中 \psi(t)=(t-x)^2，在定理 4 中 \psi(t)=\sin^2\frac{t-x}{2}\right)$在这区间上一致收敛于零，那么这些定理是正确的。

验证在所述诸定理中指出的这两个条件，而非三个条件，在多数情形下是较易实现的。

下面我们转向研究特殊的算子序列的一致收敛性，其中，一些算子序列是我们在二、三两章中曾经使用过的。

引理 2 设函数 $\varphi(x)$ 满足条件：

(1) $\varphi(x)$ 在区间 $[-c, c]$, $c>0$ 上连续，

(2) $\varphi(0)=1$；当 $x\neq 0$, $x\in[-c, c]$ 时，$0\leqslant\varphi(x)<1$。

若令

$$I_n=\int_{-c}^{c}\varphi^n(x)dx \quad 及 \quad I_n(\delta)=\int_{-\delta}^{\delta}\varphi^n(x)dx,\ 0<\delta\leqslant c,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(\delta)}{I_n}=1。$$

【证】 我们有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{-c}^{c}\varphi^n(x)dx\\&=\int_{-c}^{-\delta}\varphi^n(x)dx+\int_{-\delta}^{\delta}\varphi^n(x)dx+\int_{\delta}^{c}\varphi^n(x)dx\\&=\int_{-c}^{-\delta}\varphi^n(x)dx+\int_{\delta}^{c}\varphi^n(x)dx+I_n(\delta)。\end{aligned}\tag{3.7}$$

由于函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[-c, -\delta]$ 上连续，可设 $q_1=\max\limits_{-c\leqslant x\leqslant-\delta}\varphi(x)$。由引理条件(2)推出 $q_1<1$，同理 $q_2=\max\limits_{\delta\leqslant x\leqslant c}\varphi(x)<1$。

令 $q=q(\delta)=\max\{q_1, q_2\}$，则在集 $[-c, -\delta]+[\delta, c]$ 上函数 $\varphi(x)$ 满足不等式

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant q=q(\delta)<1。$$

据此有

$$0\leqslant\int_{-c}^{-\delta}\varphi^n(x)dx+\int_{\delta}^{c}\varphi^n(x)dx<q^n(c-\delta)+q^n(c-\delta)<2cq^n。\tag{3.8}$$

现在估计 $I_n(\delta)$。依 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性及 $\varphi(0)=1$，对于 $\varepsilon=\frac{1-q}{2}>0$ 有 $\delta_1>0(\delta_1<\delta)$ 使得，当 $|x|<\delta_1$ 时，有

$$\varphi(x)>1-\varepsilon=\frac{1+q}{2}=\tilde{q}>q。$$

由此再依函数 $\varphi(x)$ 的正性，得到

$$I_n(\delta)=\int_{-\delta}^{\delta}\varphi^n(x)dx\geqslant\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\varphi^n(x)dx>2\delta_1\tilde{q}^n。\qquad(3.9)$$

由不等式(3.8)与(3.7)推出

$$I_n(\delta)\leqslant I_n<I_n(\delta)+2cq^n。$$

把这些不等式各部分除以 $I_n(\delta)$ 并注意不等式(3.9)，得到

$$1\leqslant\frac{I_n}{I_n(\delta)}<1+\frac{2cq^n}{I_n(\delta)}<1+\frac{2cq^n}{2\delta_1\tilde{q}^n}=1+\frac{c}{\delta_1}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^n。\qquad(3.10)$$

由于 $\tilde{q}>q$，所以上面的不等式的右边趋于1，如此便证明了引理。

定理 5 设函数 $\varphi(x)$ 满足引理 2 的条件且

$$I_n=\int_{-c}^{c}\varphi^n(x)dx,$$

又设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则算子序列

$$L_n(f;x)=\frac{1}{I_n}\int_a^b f(t)\varphi^n(t-x)dt\quad(0<b-a\leqslant c)$$

在区间 $[a+\delta, b-\delta]$ $(\delta>0)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$。

【证】 依定理 4 的注记，要证明定理只须验明，在区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上序列 $L_n(1;x)$ 一致收敛于 1，而序列 $L_n(\psi;x)$ 一致收敛于零，此处 $\psi(t)=(t-x)^2$。

我们有 $$L_n(1;x)=\frac{1}{I_n}\int_a^b\varphi^n(t-x)dt。$$

令 $z=t-x$，则得

$$L_n(1;\ x)=\frac{1}{I_n}\int_{a-x}^{b-x}\varphi^n(z)\,dz。$$

我们指出，$a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$，故

$$a-x\geqslant a-(b-\delta)=\delta-(b-a)\geqslant\delta-c>-c,$$

$$a-x\leqslant a-(a+\delta)=-\delta,$$

$$b-x\geqslant b-(b-\delta)=\delta,$$

$$b-x\leqslant b-(a+\delta)=(b-a)-\delta\leqslant c-\delta<c。$$

由此再依函数 $\varphi(x)$ 的正性有

$$I_n(\delta)=\int_{-\delta}^{\delta}\varphi^n(z)\,dz\leqslant\int_{a-x}^{b-x}\varphi^n(z)\,dz\leqslant\int_{-c}^{c}\varphi^n(z)dz=I_n,$$

$$\frac{I_n(\delta)}{I_n}\leqslant\frac{1}{I_n}\int_{a-x}^{b-x}\varphi^n(z)\,dz=L_n(1;\ x)\leqslant 1。$$

又依引理 2，上述最后的不等式的左边趋于 1，因此若 $n>N_\varepsilon$，$\varepsilon>0$，$a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$，则有不等式

$$1-\varepsilon<L_n(1;\ x)\leqslant 1,\quad -\varepsilon\leqslant L_n(1;\ x)-1\leqslant 0。$$

这就验明了序列 $L_n(1;\ x)$ 在区间 $[a+\delta,\ b-\delta]$ 上的一致收敛性。剩下来要验明序列 $L_n(\psi;\ x)$，$\psi(t)=(t-x)^2$ 在这一区间上一致收敛于零。我们有

$$0<L_n(\psi;\ x)=\frac{1}{I_n}\int_a^b(t-x)^2\varphi^n(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{I_n}\int_{a-x}^{b-x}z^2\varphi^n(z)\,dz。$$

由于 $a-x\geqslant-c$，而 $b-x\leqslant c$ 且函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[-c,\ c]$ 上是正的，所以

$$0<L_n(\psi;\ x)\leqslant\frac{1}{I_n}\int_{-c}^{c}z^2\varphi^n(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{I_n}\left\{\int_{-c}^{-\alpha}z^2\varphi^n(z)\,dz+\int_{\alpha}^{c}z^2\varphi^n(z)\,dz\right\}+\frac{1}{I_n}\int_{-\alpha}^{\alpha}z^2\varphi^n(z)\,dz。$$

一与第二积分号下 $z^2\leqslant c^2$，而在第三积分号下 $z^2\leqslant\alpha^2$。因

$$0<L_n(\psi;x)$$
$$<\frac{c^2}{I_n}\left\{\int_{-c}^{-\alpha}\varphi^n(z)\,dz+\int_{\alpha}^{c}\varphi^n(z)\,dz\right\}+\frac{\alpha^2}{I_n}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi^n(z)\,dz_{\circ}$$

依不等式(3.8)得到

$$0<L_n(\psi;x)<\frac{c^2\cdot 2cq^n}{I_n}+\frac{\alpha^2}{I_n}I_n(\alpha)_{\circ} \qquad (3.11)$$

现在设 $\varepsilon>0$ 及 $\alpha^2=\frac{\varepsilon}{2}$。依引理 2，不等式(3.11)右边第二项有极限数 $\alpha^2=\frac{\varepsilon}{2}$，而依不等式(3.10)，第一项趋于零。因而成立不等式

$$0<L_n(\psi;x)<\varepsilon,$$

如果 $n>N_\varepsilon$，$a\leqslant x\leqslant b$。从而推得，序列 $L_n(\psi;x)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛于零，定理得证。

§4. 一些著名的线性正算子

在逼近论中，许多重要的线性方法都是由线性正算于序列给出的。于此，我们列举一些熟知的例于(其中一些，在前面几章中已经遇见过)。

4.1 Weierstrass 算子

这个算子是 Weierstrass 在 1885 年证明 Weierstrass 第一逼近定理时引进的。设 $f(x)\in C[a,b]$，不失一般性，我们可以认为$f(x)$在整个实轴上连续。现在令 $a_1=a-\delta$，$b_1=b+\delta$，$\delta>0$ 及

$$W_n(f;x)=\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1}f(t)e^{-n(t-x)^2}dt,$$

其中 $$I_n=\int_{-c}^{c} e^{-nt^2}dt,\quad c=b_1-a_1。$$

显然，$W_n(f;x)$是线性正算子，它也就是 Weierstrass 算子。

现在我们证明，算子序列 $W_n(f;x)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛于函数$f(x)$。事实上，这些算子是定理 5 中所考察的算子的特例，且可于定理 5 中令

$$\varphi(x)=e^{-x^2},\ -c\leqslant x\leqslant c,\ \varphi^n(t-x)=e^{-n(t-x)^2}$$

而得到。由于函数$\varphi(x)=e^{-x^2}$满足定理 5 的条件（$\varphi(x)$在区间 $-c\leqslant x\leqslant c$ 上连续，$\varphi(0)=1$，$0<\varphi(x)<1$，$x\neq 0$），所以依定理 5，算子序列 $W_n(f;x)$在区间 $[a_1+\delta,\ b_1-\delta]=[a,\ b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

4.2 Landau 算子

这个算子是 Landau 在 1908 年给出 Weierstrass 第一逼近定理的另一证明时引进的。设函数 $f(x)$ 在整个实轴上连续，$a_1=a-\delta$，$b_1=b+\delta$，$\delta>0$。令

$$L_n(f;x)=\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} f(t)\left\{\frac{c^2-(t-x)^2}{c^2}\right\}^n dt,$$

其中 $$c=b_1-a_1,\quad I_n=\int_{-c}^{c}\left(\frac{c^2-x^2}{c^2}\right)^n dt。$$

算子 $L_n(f;x)$即 Landau 算子。进一步还容易证明 $L_n(f;x)$为多项式。事实上，将 $L_n(f;x)$的积分表达式中含于花括弧的项（亦即$\{\cdot\}^n$）展开再对 t 积分，即可看出 $L_n(f;x)$为关于 x 的 $2n$ 次多项式。Landau 算子也是定理 5 中所考虑的算子的特例，且可从那里令 $\varphi(x)=\dfrac{c^2-x^2}{c^2}$，$-c\leqslant x\leqslant c$ 而得到。由于函数 $\varphi(x)=\dfrac{c^2-x^2}{c^2}$ 满足条件：$\varphi(0)=1$，$0<\varphi(x)<1$，$x\neq 0$，所以依定理 5，Landau 算子序列在区间 $[a_1+\delta,\ b_1-\delta]$

在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$。亦即，对任给的 $\varepsilon>0$，有 N_ε，使得当 $n\geq N_\varepsilon$ 时，恒有

$$|f(x)-L_n(f;x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b)。$$

又因为 $L_n(f;x)$ 为多项式，因此实际上我们已经证明了 Weierstrass 第一定理。

4.3 Бернштейн 算子

这个算子是 Бернштейн 在 1912 年为了给出 Weierstrass 第一逼近定理的另一证明而引进的(参阅第二章 §1)。令

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

则 $B_n(f;x)$ 是线性算子。又当 $x\in[0, 1]$ 时，$c_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ 为正，故当 $x\in[0, 1]$ 时，$B_n(f;x)$ 为线性正算子。我们称 $B_n(f;x)$ 为 Бернштейн 算子。

我们再一次来证明，若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则序列 $B_n(f;x)$ 在这区间上一致收敛于 $f(x)$。依定理 3，为要证明这一论断，只须验明对于三个函数 $f_k(t)=t^k$; $k=0, 1, 2$ 中的每一个，序列 $B_n(f_k;x)$ 都一致收敛于 $f_k(x)$ (在定理 3 中假设了函数在点 b 右连续，在点 a 左连续。可是 Бернштейн 算子不依赖于函数 $f(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 外的性质，这是由于若 $0\leqslant k\leqslant n$，则 $0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1$，因而这里毋须作所指的补充假定)。事实上，利用恒等式 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} c_n^k a^k b^{n-k}$，立刻得到

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n} c_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1。$$

次之，

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n} c_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} c_n^k x^k(1-x)^{n-k}。$$

但是由于

$$\frac{k}{n}c_n^k=\frac{k}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots1}$$

$$=\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}=c_{n-1}^{k-1},$$

所以

$$B_n(t;x)=\sum_{k=1}^{n}c_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}c_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}$$

$$=x(x+1-x)^{n-1}=x。$$

最后

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}c_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}c_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n-1}c_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}c_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n}x\sum_{k=1}^{n}c_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2}+\frac{x}{n}(x+1-x)^{n-1}$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}。$$

于是，我们已证实了 $B_n(f_k;x)$ 一致收敛于 $f_k(t)=t^k$，$k=0,1,2$。所以依定理 3，当函数 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续时，序列 $B_n(f;x)$ 将在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$。由于 $B_n(f;x)$ 为多项式，所以当区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 重合时，实际上我们已经证明了 Weierstrass 定理。至此，再利用线性变换，我们已

经容易将 Weierstrass 定理推广到任意区间$[a, b]$。

4.4 Jackson 算子

令 Ψ_m 表 Jackson 核

$$\Psi_m(u)=\frac{3}{2m\pi(2m^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{m}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^4,$$

则由卷积公式给出的算子 J_m:

$$J_m(f;x)=f*\Psi_m=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cdot\Psi_m(y-x)dy$$

是从 $C_{2\pi}$ 到 T_{2m-2} 的正算子，这可以由核的非负性推出。关于 Jackson 算子序列的收敛性请参阅第三章的 Jackson 定理。

其它的线性正算子(例如，Fejér 算子，Vallée-Poussin 算子，Канторович 算子，等等)，可以从第三章的习题中找到。

第四章习题

1. 试证，若 $f(x)$ 在区间$[0, 1]$上有界可积并在点 $x=1$ 连续，则泛函数序列

$$I_n(f)=n\int_0^1 f(x)x^n dx$$

收敛于 $f(1)$。

2. 题 1 中的泛函数序列将收敛于 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$，如果函数 $f(x)$ 在区间$[0, 1]$上有界可积，并且函数在点 $x=1$ 的左极限存在。

3. 试证，泛函数序列

$$I_n^{(1)}(f)=\frac{n}{2}\int_0^2 f(x)\varphi_1^n(x)dx,$$

其中

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$$

收敛于 $f(1)$，如果函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续且是一致有界的话。

4．试证，若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$，$a>0$，上连续，在 $x=a$ 为右连续且在实轴上有界，则算子序列

$$Б_n(f, x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) c_{-n}^{k}(-x)^{k}(1+x)^{-n-k},$$

$$c_{-n}^{k}=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

在这区间上一致收敛于 $f(x)$（B. A. Баскаков）。

5．试证，算子序列

$$M_n(f; x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k e^{-nx}$$

在区间 $[0, a]$ 上一致收敛于满足前题条件的函数 $f(x)$（Г. М. Милакяьн）。

6．试证，Бернштейн 多项式及其关于它们的序列的一致收敛性定理可由上题得出。

7．正算子序列

$$L_n(f; x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right\}^2 c_n^k x^k(1-x)^{n-k} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

满足下列条件：

$$L_n(t^s; x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^s\right\}^2 c_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^s c_n^k x^k(1-x)^{n-k}=B_n(t^s, x)\to x^s \quad (s=0, 1, 2),$$

其中 $B_n(f; x)$ 为 Бернштейн 算子。依定理 3，只要 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，就有

$$L_n(f; x)\to f(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)。$$

但是

$$L_n(2t, x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{2\sqrt{\frac{k}{n}}\right\}^2 c_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} 4\frac{k}{n} c_n^k x^k(1-x)^{n-k}=B_n(4t; x)=4x\neq 2x。$$

问错误何在？

8．读者容易验证，对于线性算子序列

$$L_n(f;x)=\frac{f(-1)}{2}(x^2-x)+\frac{f(1)}{2}(x^2+x)-f(0)(x^2-1)+\frac{1}{n},$$

下列条件满足:

$$L_n(1;x)=1+\frac{1}{n}\to 1;$$

$$L_n(t;x)=x+\frac{1}{n}\to x;$$

$$L_n(t^2;x)=x^2+\frac{1}{n}\to x^2。$$

若$f(x)$连续，依定理3，序列$L_n(f;x)$在任何区间上一致收敛于$f(x)$。可是，$L_n\left(\sin\frac{\pi}{2}t;x\right)=x+\frac{1}{n}\to x\neq\sin\frac{\pi}{2}x$。问错误何在?

第五章　平方逼近

在这一章，我们较系统地介绍平方逼近的理论和实用调和分析中的一些典型方法。

§1. 最小二乘法

利用插值方法构造近似多项式，总是要求这个多项式在预先给定的若干个点上取给定值。但对于有些情形上述要求并不十分适宜，因为给定值多数是通过观测或实验得到的，它们常常带有误差。即使给定值是精确的，实际问题对各点的近似程度要求也并不一致，许多时候是要求在确定意义下的整体近似。当然，在个别数据或实验有严重错误的情况下坚持近似多项式精确符合这些数据或实验是更为不利的。

在一致逼近中，我们是用数量

$$\|P-f\|=\max_{a\leq x\leq b}|P(x)-f(x)| \tag{1.1}$$

去度量近似多项式 $P(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 的逼近程度的。若 $\|P_n-f\|\to 0(n\to\infty)$，那就意味着序列 $P_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。显然，逼近程度的度量方式并不是唯一的。通常，称度量(1.1)为 Чебышев *度量*。这种度量很直观，也有它的长处，但是由于它的非线性特征使得最佳一致逼近多项式的构造问题显得十分困难。

鉴于上述情况，有必要引进新的度量方式。本章就是讨论在*平方度量*意义下函数的近似表示问题，亦即近似多项式的构造问题。

在这一节，先来介绍历史悠久的最小二乘法，它起源于以测量和观测为基础的天文学。Gauss在1794年利用最小二乘法解决了多余观测问题，当时他只有十七岁。这类问题可以用下面的简单例子加以描述。

假定通过观测（或实验）得到如下一组数据（即列表函数）：

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1.4	1.3	1.4	1.1	1.3	1.8	1.6	2.3

我们的任务是用一简单的式子表出这些数据间的关系。从分析数据看出（可画图），这些点差不多分布在一条直线上，因此我们自然想到用线性式 $y=a+bx$ 表示它们之间的关系。这样就必须定出参数 a 和 b 的值来。这实际上是多余观测问题，用插值法不能确定出 a 和 b 的值。待定参数的确定归结为矛盾方程组的求解问题。

假定有某方法可以定出 a 和 b，则按 $y=a+bx$，给出一个 x 便可以算出一个 y。我们记

$$\bar{y}_k=a+bx_k \quad (k=1, \cdots, 8)。$$

$\bar{y}_k$ 称为 y_k 的估计值，显然它们不会是完全相同的，它们之间的差（通常称为*残差*）

$$\varepsilon_k=y_k-\bar{y}_k \quad (k=1, \cdots, 8)$$

无疑是衡量被确定的参数 a 和 b（也就是近似多项式 $y=a+bx$）好坏的重要标志。

可以规定许多原则来确定参数 a，b。例如，

(1) 参数的确定，将使残差绝对值中最大的一个达到最小，即 $T=\max\limits_{k}|e_k|$ 为最小；

(2) 参数的确定，将使残差绝对值之和达到最小，即 $\sum\limits_{k}|e_k|$ 为最小；

(3) 参数的确定，将使残差的平方和达到最小，即 $\sum\limits_{k}e_k^2$ 为最小。

(1)和(2)两个原则是很直观的，也很理想，但很不好用；而原则(3)既很直观又很好用。按原则(3)确定待定参数，从而得到近似多项式的方法，就是通常所说的最小二乘法。这一方法的理论根据是，概率理论已证明，只有这样的原则才能使得观测(或实验)的偶然误差对于所作的近似多项式有最小的影响。

回到我们所提出的问题上来，我们用最小二乘法确定参数 a、b。按最小二乘法，应使

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))^2$$

取最小值。因此，应有

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))x_i=0。$$

由此，得到如下线性方程组：

$$a\sum_{i=1}^{8}i^0+b\sum_{i=1}^{8}x_i=\sum_{i=1}^{8}y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{8}x_i+b\sum_{i=1}^{8}x_i^2=\sum_{i=1}^{8}x_iy_i。$$

经简单计算，这个方程组成为

$$\begin{cases} 8a+28b=12.2, \\ 28a+140b=47.3。\end{cases}$$

解之可得 $a=1.142$, $b=0.110$, 从而得近似多项式 $P_1(x)=1.142+0.110x$。

现在，我们转入讨论更为一般的情形。设已知列表函数 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, m)$，并且我们想用一个通常的 $n(<m)$ 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{1.2}$$

去近似它。问题是应该如何选择 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得 $P_n(x)$ 能较好地近似列表函数 $f(x)$。按最小二乘法，我们应该选择那样的 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，它们使得

$$S(a_0, a_1, \cdots, a_n)=\sum_{i=0}^{m}(f(x_i)-P_n(x_i))^2 \tag{1.3}$$

取最小值。我们注意到 S 是非负的，且是 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的二次多项式，它必有最小值。现在我们求 S 对 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的偏导数并令其等于零，得到

$$\sum_{i=0}^{m}(y_i-a_0-a_1x_i-\cdots-a_nx_i^n)x_i^k=0 \quad (k=0, 1, \cdots, n)。$$

进一步，可以将它们写成

$$\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^k=a_0\sum_{i=0}^{m}x_i^k+a_1\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+1}+\cdots+a_n\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+n}$$
$$(k=0, 1, \cdots, n)。$$

引进记号 $\quad s_k=\sum_{i=0}^{m}x_i^k \quad$ 和 $\quad u_k=\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^k$,

则上述方程组成为

$$\begin{cases} s_0a_0+s_1a_1+\cdots+s_na_n=u_0, \\ s_1a_0+s_2a_1+\cdots+s_{n+1}a_n=u_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_na_0+s_{n+1}a_1+\cdots+s_{2n}a_n=u_n。\end{cases} \tag{1.4}$$

它的系数行列式是

$$X_{n+1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}。$$

由 $s_i(i=0, 1, \cdots, 2n)$ 的定义及行列式性质，可以断言

$$X_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\sum(W(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n))^2。\qquad (1.5)$$

此处符号 W 表 Vandermonde 行列式，而 $\sum$ 是对所有可能的 $\xi_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 求和（每个 ξ_i 可以取值 $x_0, x_1, \cdots, x_m$，并且当 $i\neq j$ 时 $\xi_i\neq\xi_j$）。

由 (1.5) 式及 Vandermonde 行列式的性质（指 $W(x_0, x_1, \cdots, x_n)=\prod\limits_{p<q}^{0\cdots n}(x_q-x_p)$）可知，当 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 互异时

$$W(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_0^2 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_0^n & \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \end{vmatrix}\neq 0。$$

从而，$X_{n+1}\neq 0(>0)$，方程组(1.4)有唯一解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，它们使得(1.3)取极小值。如此，我们应用最小二乘法找到了 $f(x)$ 的近似多项式 $P_n(x)$。

在利用最小二乘法组成和式 (1.3) 时，所有的点 x_i 都起着同样的作用，但是有时依据某种理由认为 $\sum$ 中的某些项的作用大些，而另外一些作用小些（例如，一些 y_i 是由精度较高的仪器或操作上比较熟练的人员获得的，自然应该予以较大的信任），这在数学上表现为用和

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i (f(x_i) - P_n(x_i))^2 \tag{1.6}$$

替代和(1.3)取最小值。此处 ρ_i 是任意的正数，通常称之为权*)；而称(1.6)为加权和。

例 1　设已知函数 $f(x)$ 的表列值为

x	0.2	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718

试按最小二乘法构造 $f(x)$ 的二次近似多项式。

【解】　经简单计算可得关于参数 a_0, a_1 和 a_2 的方程组(参阅下面的第一个表)：

$$5a_0 + 3.250a_1 + 2.503a_2 = 9.942,$$

$$3.250a_0 + 2.503a_1 + 2.090a_2 = 7.185,$$

$$2.503a_0 + 2.090a_1 + 1.826a_2 = 5.857。$$

解之，得 $a_2 = 0.928$, $a_1 = 0.751$, $a_0 = 1.036$。故

$$P_2(x) = 0.928x^2 + 0.751x + 1.036。$$

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0.2	0.04	0.008	0.002	1.221	0.244	0.049
1	0.5	0.25	0.125	0.063	1.649	0.824	0.412
1	0.7	0.49	0.343	0.240	2.014	1.410	0.997
1	0.85	0.723	0.614	0.522	2.340	1.989	1.690
1	1	1	1	1	2.718	2.718	2.718
5	3.250	2.503	2.090	1.826	9.942	7.185	5.857

*) 常常使权 ρ_i 满足 $\sum_{i=0}^{m} \rho_i = 1$，这应该是好理解的。

下表给出了 $P_2(x)$ 在结点处的误差。

x	0.2	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718
$P_2(x)$	1.223	1.644	2.017	2.344	2.715
$y-P_2(x)$	−0.002	0.005	−0.003	−0.004	0.003

用多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 去近似一个给定的列表函数(即给出的一组观测值 $y_i=f(x_i)$)时，需要确定的参数是 a_0, a_1, …, a_n; 而 $P_n(x)$ 可以看成是 a_0, a_1, …, a_n 的线性函数。但是有时在利用观测(或实验)数据去确定一个经验公式时，往往要确定的函数和待定参数之间不具有线性形式的关系。这样问题就变得有些复杂。然而，常常可以通过变量替换使其线性化。例如：

(i) 有时，我们希望用如下类型的函数：

$$s=pt^q \tag{1.7}$$

去近似一个由一组观测数据(列表)所描绘的函数，其中 p 和 q 是待定的两个参数。显然 s 已非 p 和 q 的线性函数。怎样线性化呢？为此，我们在(1.7)式两端取对数，得到

$$\log s=\log p+q\log t,$$

记 $\log s=y$, $\log p=a_0$, $a_1=q$, $x=\log t$, 则(1.7)式变成

$$y=a_0+a_1x。$$

这是一个一次多项式，它的系数 a_0 和 a_1 可以用最小二乘法求得。

(ii) 我们还经常希望用函数

$$S=Ae^{Ct} \tag{1.8}$$

去近似一个已给定的列表函数，其中 A, C 是待定的参数。这时，我们可以在(1.8)的两端取对数：

$$\log S=\log A+Ct。$$

记 $\log S=y$, $\log A=a_0$, $C=a_1$, $x=t$, 则(1.8)式变成

$$y=a_0+a_1x。$$

这样，仍可用最小二乘法定出 a_0, a_1(从而也就定出了 A, C)，得到近似函数 $S=Ae^{Ct}$。

例 2 设已知如下一组实验数据：

$t=2.2$	2.7	3.5	4.1
$S=65$	60	53	50

试求一个(1.7)型的函数去近似它。

【解】 计算以紧凑的形式表示如下：

x_0	$x=\log t$	x^2	$y=\log S$	xy
1	0.3424	0.1172	1.8129	0.6207
1	0.4314	0.1861	1.7782	0.7671
1	0.5441	0.2960	1.7243	0.9382
1	0.6128	0.3755	1.6990	1.0411
4	1.9307	0.9748	7.0144	3.3671
S_0	S_1	S_2	u_0	u_1

由此得方程组

$$4a_0+1.9307a_1=7.0144,$$

$$1.9307a_0+0.9748a_1=3.3671。$$

解之得 $a_0=\log p=1.963$, $p=91.9$, $q=a_1=-0.434$, 从而

$$S=91.9t^{-0.434}。$$

§2. 空间 $L^2_{\rho(x)}$

设已知一列表函数 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, m)$。为了构

造一个$n(<m)$次多项式$P_n(x)$近似地代表函数$f(x)$，按最小二乘法应使和

$$S=\sum_{i=0}^{m}(P_n(x_i)-f(x_i))^2$$

取最小值。这相当于用结点$x_i(i=0, 1, \cdots, m)$约束$P_n(x)$，看$P_n(x)$近似列表函数$f(x)$的程度如何，也只是看在这$m+1$个结点上的情况（亦即平方偏差$(P_n(x_i)-f(x_i))^2$）。有时也需要考虑在全区间$[a, b]$上构造函数$f(x)$的近似多项式$P_n(x)$，此时自然应以积分

$$\int_a^b (P_n(x)-f(x))^2 dx$$

代替和Σ取最小值。实际上，在数值分析中的确常常以数量

$$\|P-f\|=\sqrt{\int_a^b (P(x)-f(x))^2 dx}$$

来度量函数$P(x)$与$f(x)$的接近程度。

只要回想一下n维欧氏空间中的两点距离公式，就知道上述的数量可以类似地理解为函数空间中的元素$P(x)$与$f(x)$两者间的距离。而当$\|P_n-f\|\to 0(n\to\infty)$时，也就可把$P_n(x)$理解为按照上述的平方度量收敛于$f(x)$，记作

$$P_n(x)\xrightarrow{2} f(x), \quad n\to\infty。$$

习知，在实变函数论中讨论L^2空间理论时，我们正是这样来理解一个叙列的收敛（或极限）概念的。

为了实用上的需要，我们还有必要进一步去扩充上述的观点。设$\rho(x)$是一个在区间$[a, b]$上(L)可积的非负函数，它至多只在一个测度为零的集合上可能等于零。以后我们常把$\rho(x)$称为权函数。

对于任意一个定义在区间$[a, b]$上的可测函数$f(x)$，如

果 $\rho(x)f(x)$ 为 (L) 可积，则就说 $f(x)$ 属于 $L_\rho[a, b]$ 类；如果 $\rho(x)(f(x))^2$ 为 (L) 可积，则说 $f(x)$ 属于 $L_\rho^2[a, b]$ 类。

由不等式

$$\rho(x)|f(x)|\leqslant\rho(x)\frac{1+f^2(x)}{2}$$

可以看出，凡 L_ρ^2 中的函数都在 L_ρ 内（即 $L_\rho^2\subset L_\rho$）。又由不等式

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

可知 L_ρ^2 中每两个函数之积恒属于 L_ρ。

现在介绍一下范数的概念。对于 L_ρ^2 中的每一个函数 $f(x)$，我们都赋予一个数值

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b\rho(x)[f(x)]^2dx},$$

并称它为 f 的广义绝对值或范数。由此

$$\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b\rho(x)[f(x)-g(x)]^2dx}$$

便给出了两个函数 f 与 g 之间的距离或接近程度的度量。所谓平方逼近正是按照这种度量方式来规定其逼近概念的。

下面关于范数的三条基本性质是容易验证的：

1. $\|f\|\geqslant0$，并且当且仅当 $f\equiv0$ 时 $\|f\|=0$；
2. $\|cf\|=|c|\cdot\|f\|$，c 为一任意常数；
3. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$。

看来只有性质 3 是需要仔细验证的。事实上，在 Буняковский 不等式

$$\int_a^b\rho fg\,dx\leqslant\left(\int_a^b\rho f^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\rho g^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

的两边乘以 2，并各加上

$$\int_a^b \rho f^2 dx + \int_a^b \rho g^2 dx,$$

得到

$$\int_a^b \rho(f+g)^2 dx \leqslant \left(\left(\int_a^b \rho f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b \rho g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2。$$

再将上式两边各自开平方，就恰好得到了性质3中的不等式。

利用泛函分析的术语来说 若是一个函数类中的元素(函数)，按某种方式赋予范数的概念之后，而范数恰好具有性质1, 2和3，那么就说该函数类构成了一个赋范空间。如此看来，函数类 L_ρ^2 对于上面所规定的范数来说恰好构成一个赋范空间，不妨仍用原记号 L_ρ^2 来表示这个空间，同时也还不妨把其中的所有元素(函数)称之为该空间的点。

读者还不难自行验证，当 $[a, b]$ 上一切连续函数 $f(x)$ (多项式自然包括在内)赋以范数 $\|f\| = \max|f(x)|$ 之后，恰好构成一个赋范空间。原因是性质1, 2, 3都是一一具备的。

下面，我们来介绍一下距离空间的一般概念。假设 S 是任意性质的元素 $x, y, z, \cdots$ 的集合。如果对应于 S 中每一对元素 x 和 y 都有一个具有如下性质的实数 $d(x, y)$：

1° $d(x, y) \geqslant 0$，并且当且仅当 $x = y$ 时 $d(x, y) = 0$；

2° $d(x, y) = d(y, x)$；

3° $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (所谓三角不等式)，

那末集合 S 便叫作"距离空间"，而 $d(x, y)$ 称为元素 x 与 y 间的距离。

就 L_ρ^2 空间来看，如果令

$$d(f, g) = \|f - g\|,$$

则条件1°与2°被满足是十分明显的。至于条件3°，显然相当于

$$\|f-h\|\leqslant\|f-g\|+\|g-h\|,$$

其中 f, g, h 均属于 L_ρ^2。由于 $f-h=(f-g)+(g-h)$, 所以这个不等式实际是可以从范数性质 3 推导出来的。因此, L_ρ^2 又作成一个距离空间。

仿 L^2 空间的理论, 我们也可对 L_ρ^2 中的元素叙列 f_1, f_2, $\cdots$, f_n, $\cdots$ 引进平均收敛性概念。假如 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$, 则称叙列 $f_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$, 记作 $f_n(x)\xrightarrow[\rho]{2}f(x)$ $(n\to\infty)$。完全类似地, 假如

$$\|f_m-f_n\|\to 0\quad(m,\ n\to\infty),$$

则称 $\{f_n\}$ 为 L_ρ^2 中的基本叙列。还可以证明, L^2 空间理论中的 Fischer 定理在此仍然成立。亦即, 凡 L_ρ^2 中的基本叙列必有极限且极限函数仍在 L_ρ^2 中(这也就是关于 L_ρ^2 空间的完备性定理)。

§3. 直交函数系与广义 Fourier 级数

设 $\rho(x)$ 为定义在闭区间 $[a, b]$ 上的权函数。如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件:

$$\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx=0,$$

则说函数 f 与 g 在 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 是直交的。又如果函数系统

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \cdots,\ \omega_k(x),\ \cdots$$

中的每一对函数在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 均为直交, 则称该系统为 $[a, b]$ 区间上的关于权函数 $\rho(x)$ 的直交函数系。特别, 若 $\rho(x)\equiv 1$, 那就可以不必提到权函数。

让我们在这里列举几个最常见的直交函数系。

例 1 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是定义在闭区间$[-\pi, \pi]$上的直交函数系。

例 2 余弦函数系与正弦函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$$

$$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$$

均是$[0, \pi]$上的直交函数系。

例 3 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots)$$

是区间$[-1, 1]$上的直交多项式系。

例 4 Чебышев 多项式系 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是区间$[-1, 1]$上对权函数$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$而言的直交系。

例 5 考虑 Sturm-Liouville 型微分方程边值问题：$y''+\lambda\rho(x)y=0$, $y(a)=y(b)=0$。此处$\rho(x)>0$是定义在$[a, b]$上的连续函数，而λ为数值参数。除去平凡解$y(x)\equiv 0$不予考虑之外，凡不恒等于零的解$y(x)$均称为*基本函数*，而对应的λ值称为*特征值*(注意并非任何λ值都对应有基本函数)。根据微分方程式理论，上述边值问题的特征值总是存在的，而且除常数因子不计外，对应于每一特征值都只有一个基本函数。特征值可以由小而大的排列起来，因而对应的基本函数也可排成一列，例如：

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \cdots,$$

$$y_1(x), \ y_2(x), \ y_3(x), \ \cdots。$$

可以证明，上列的基本函数系在闭区间$[a, b]$上关于权$\rho(x)$

是直交系。

事实上，假如 $i\neq k$，则

$$y_i''+\lambda_i\rho(x)y_i=0,\quad y_k''+\lambda_k\rho(x)y_k=0。$$

用 y_k、y_i 分别乘第一、第二式，再相减则得

$$(\lambda_i-\lambda_k)\rho(x)y_iy_k+\frac{d}{dx}(y_ky_i'-y_iy_k')=0。$$

两边积分又得

$$(\lambda_i-\lambda_k)\int_a^b\rho(x)y_iy_k\,dx+[y_ky_i'-y_iy_k']_a^b=0。$$

由边界条件及 $\lambda_i\neq\lambda_k$ 便得知

$$\int_a^b\rho(x)y_iy_k\,dx=0。$$

证毕。

下面着重介绍广义的 Fourier 展开问题。设 $\{\omega_k(x)\}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 作成直交函数系，其中每一个 $\omega_k(x)$ 均不几乎处处等于零且均在空间 L_ρ^2 中，因而

$$A_k=\int_a^b\rho(x)\omega_k^2(x)dx\quad(k=1, 2, \cdots)$$

都是有限正数。特别，若 $A_k=1(k=1, 2, \cdots)$，则称 $\{\omega_k(x)\}$ 为标准直交系$\left(\text{显然，}\left\{\frac{\omega_k(x)}{\sqrt{A_k}}\right\}\text{总是标准直交系}\right)$。

设 $f(x)\in L_\rho^2$，则称按下式算出的常数

$$c_k=\frac{1}{A_k}\int_a^b\rho(x)\omega_k(x)f(x)dx\quad(k=1, 2, \cdots)$$

为 $f(x)$ 的广义 Fourier 系数，从而有如下的广义 Fourier 级数：

$$f(x)\backsim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\omega_k(x)。$$

由于我们还不能断定上面的 Fourier 级数是否平均收敛于 $f(x)$，所以只能用联结符号 $\backsim$ 去表示它们之间的相应关系。尽管如此，这个级数的部分和却能用来圆满地解答一般形式的最小二乘方问题。这便是下面的

定理 1(Toepler) 对于任意指定的正整数 n，用线性组合式

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k(x)$$

作成的函数来对给定的 $f(x)$ 进行平方逼近时，为使偏差(平均平方偏差)

$$\|F-f\|=\left(\int_a^b\rho(x)[F(x)-f(x)]^2dx\right)^{1/2}$$

达到最小值，函数 $F(x)$ 必须等于广义 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$：

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\omega_k(x),$$

而偏差的最小值等于

$$\|S_n(x)-f(x)\|=\left(\int_a^b\rho(x)[f(x)]^2dx-\sum_{k=1}^{n}A_kc_k^2\right)^{1/2}。$$

【证】 根据 $\{\omega_k\}$ 的直交性易算出

$$\begin{aligned}\|F-f\|^2&=\int_a^b\rho(x)[F(x)-f(x)]^2dx\\&=\int_a^b\rho F^2dx+\int_a^b\rho f^2dx-2\int_a^b\rho Ff\,dx\\&=\int_a^b\rho\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\omega_k^2\right)dx+\int_a^b\rho f^2dx-2\int_a^b\rho\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_kf\right)dx\\&=\sum_{k=1}^{n}A_ka_k^2+\int_a^b\rho f^2dx-2\sum_{k=1}^{n}A_ka_kc_k\\&=\int_a^b\rho f^2dx+\sum_{k=1}^{n}A_k(a_k-c_k)^2-\sum_{k=1}^{n}A_kc_k^2。\end{aligned}$$

因此要使 $\|F-f\|^2$ 取最小值，唯有令 $a_k=c_k$。亦即，只有当 $F(x)$ 恰好等于 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 时才给出了偏差 $\|F-f\|$ 的最小值。证毕。

注意 $\|S_n-f\|\geqslant 0$，因此根据最小值的那个表达式立即推出

$$\sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx。$$

又因为不等式的右端与 n 无关，故可令 $n\to\infty$ 而得出

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx。 \tag{3.1}$$

通常称(3.1)式为广义 Bessel 不等式。

根据偏差的最小值表达式知上述的 Bessel 不等式能改为所谓的 Parseval 等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(x)-f(x)\|=0。$$

换言之，Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$ 这件事是同 $f(x)$ 的 Parseval 等式成立这件事互相等价的。因此，L_ρ^2 空间中的一个 Fourier 级数是否收敛的问题也就归结为 Parseval 等式是否成立的问题。

这里有一个问题：在什么条件下，给定的数列 $\{c_k\}$ 能够有资格作为 L_ρ^2 中某一函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数，并且作成的 Fourier 级数平均收敛于 $f(x)$？正象通常的 Fourier 级数论那样，对于这个问题的回答有如下的

定理 2(Riesz-Fischer)　设 $\{\omega_k(x)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 作成直交函数系。若数列 $\{c_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 满足条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty,$$

其中 $A_k=\int_a^b \rho\omega_k^2\, dx$, 则 L_ρ^2 中存在唯一的函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 的 Fourier 系数恰好是 $\{c_k\}$ 且 $\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)$。

【证】 记 $$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x),$$

则于 $m>n$ 时依 ω_k 间的直交性显然有

$$\|S_m-S_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\omega_k\right\|^2=\int_a^b \rho\left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k\omega_k\right]^2 dx$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m} A_k c_k^2 \to 0 \quad (m>n\to\infty)。$$

因此, $\{S_n\}$ 为一基本序列, 并从而由 L_ρ^2 的完备性得知其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ 亦在 L_ρ^2 中(当然这里所说的极限是按照平均收敛的意义而言的)。亦即有 L_ρ^2 中的函数 $f(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-f\|=0。$$

现在应该验证 $\{c_k\}$ 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 系数。由于

$$\int_a^b \rho(f-S_n)\omega_k\, dx \leqslant \left(\int_a^b \rho(f-S_n)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b \rho\omega_k^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$=\|f-S_n\|\sqrt{A_k}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

故 $$\int_a^b \rho f\,\omega_k\, dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \rho S_n\,\omega_k(x)\, dx=c_k A_k。$$

这表明 c_k 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 从而 S_n 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和, 而极限关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n-f\|=0$ 恰好表明该 Fourier 级数是平均收敛的: $S_n \xrightarrow[\rho]{2} f$。

又因为序列 $S_n(x)$ 的极限是唯一的, 因此作为极限函数而存在的 $f(x)$ 也是唯一的。证毕。

若一个直交函数系 $\{\omega_k\}$ 对于 L_ρ^2 中的每一函数 Parseval 等式都成立，则称它为封闭的直交系。

若 $\{\omega_k\}$ 为封闭的直交系，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 L_ρ^2 中的任意两函数，它们的 Fourier 系数分别为 $\{\alpha_k\}$ 与 $\{\beta_k\}$，则必成立下列的广义 Parseval 等式：

$$\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\alpha_k\beta_k。$$

事实上，因为 $f+g$ 的 Fourier 系数为 $\{\alpha_k+\beta_k\}$，因此利用通常的 Parseval 等式应该有

$$\int_a^b \rho(f^2+2fg+g^2)dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\alpha_k^2+2\alpha_k\beta_k+\beta_k^2),$$

$$\int_a^b \rho f^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\alpha_k^2, \quad \int_a^b \rho g^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\beta_k^2。$$

故由上列三式间的比较便得出广义的 Parseval 等式。

给定一个直交系 $\{\omega_k\}$，如果 L_ρ^2 中再也没有一个函数（几乎处处等于零的函数除外）能和一切 ω_k 相直交，那末 $\{\omega_k\}$ 便称为完备的直交系。

直交系的完备性实际是和封闭性等价的。这就是下述的

定理 3 $\{\omega_k\}$ 是一个完备直交系的充分必要条件是：它是一个封闭直交系。

【证】 如果 $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系，则当一函数 f 与每一 ω_k 都直交时，该函数的 Fourier 系数就都等于零：$\alpha_k=0(k=1, 2, \cdots)$。因而根据 Parseval 等式就得到

$$\int_a^b \rho f^2 dx = 0。$$

注意 ρ 为非负而且至多只在一个零测度集上可能等于 0，因此可以断言 $f(x)$ 只能几乎处处等于 0。这就表明 $\{\omega_k\}$ 必是一个完备直交系。

反之，如果 $\{\omega_k\}$ 不是封闭的，则在 L_ρ^2 中就有使 Parseval 等式不成立的函数 $g(x)$，亦即有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < \int_a^b \rho(x)[g(x)]^2 dx,$$

其中 c_k 为 $g(x)$ 的 Fourier 系数。既然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty$，故按 Riesz-Fischer 定理，$L_\rho^2$ 中又必存在函数 $f(x)$，以 $\{c_k\}$ 作为它的 Fourier 系数且 $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)$ $(n\to\infty)$，并从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 dx。$$

以此与上述不等式相比较，可知差函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 不能几乎处处等于 0。然而 $h(x)$ 的 Fourier 系数都是 0（亦即 $h(x)$ 与一切 ω_k 直交），这表明 $\{\omega_k\}$ 必非完备直交系。定理证毕。

作一简单总结，我们知道下列诸概念都是彼此等价的（也就是通常数理逻辑中所说的"同义反复"）：

1° $\{\omega_k\}$ 是完备直交系；

2° $\{\omega_k\}$ 是封闭直交系；

3° Parseval 等式对每个 $f\in L_\rho^2$ 都成立；

4° L_ρ^2 中每个 f 的 Fourier 级数都平均收敛；

5° 只有几乎处处取零值的函数才能同一切 ω_k 相直交；

6° 当两个函数有相同的 Fourier 级数时，它们必定几乎处处相等；

7° 对 L_ρ^2 中的每个 f 用 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的线性组合来作平方逼近时，偏差的最小值恒与 $\dfrac{1}{n}$ 同时趋于 0；

8° 由 $\{\omega_k\}$ 中的函数的一切线性组合构成的类是在 L_ρ^2 中

稠密的(亦就是说：对 L_ρ^2 中的每个 f 及对任意 $\varepsilon>0$，都存在有满足不等式 $\|F-f\|<\varepsilon$ 的线性组合 $F(x)=\sum_1^n a_k\omega_k$)。

注意上述的等价命题 7° 是直接可以从 Toepler 定理的结论得知的。又 8° 与 7° 的等价关系也是十分明显的。

§4. 直交函数结构公式

关于函数系的线性相关与线性无关的概念，实际和通常向量代数中所说的概念是完全一样的。

设 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$是定义在$[a, b]$上的函数系。若能找到一组不全为 0 的常数 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 使得

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0,$$

那末就称该函数系是线性相关的。反之，便称之为线性无关的(只要函数是几乎处处等于零，就说它恒等于零，并用记号“$\equiv 0$”表示)。显然在线性无关的情形下要使

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k\omega_k(x)=0,$$

就只有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$。

一个包含可数多个函数的函数系，要是它的每一个有限部分都是线性无关的，那末该函数系便称为线性无关的。

例 1 函数系 1, x, x^2, $\cdots$是线性无关的。

事实上，它的每一个有限部分 x^{n_1}, x^{n_2}, $\cdots$, x^{n_k}($0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k$)都是任何区间上的线性无关函数系。

例 2 关于权函数 $\rho(x)$ 的任意直交函数系 $\{\omega_k(x)\}$ 都是线性无关的。

事实上，要是 $\alpha_1\omega_{k_1}+\cdots+\alpha_n\omega_{k_n}\equiv 0$，则以 $\rho\omega_{k_i}$ 乘等式的两边并积分，得到 $\alpha_i=0$($i=1, 2, \cdots, n$)。

作为例 2 的特例，我们知道三角函数系、余弦函数系、正弦函数系等都是线性无关的系统。

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 L_ρ^2 中的两个函数，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 乘积的积分

$$(f,\ g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积。如果 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ 都是 $L_\rho^2[a,\ b]$ 中的函数，则称由内积构成的行列式

$$\Delta_n\equiv\Delta(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)=\begin{vmatrix}(\varphi_1,\ \varphi_1) & (\varphi_1,\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\ \varphi_n)\\ (\varphi_2,\ \varphi_1) & (\varphi_2,\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\ \varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_n,\ \varphi_1) & (\varphi_n,\ \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\ \varphi_n)\end{vmatrix}$$

为函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的 Gram 行列式。借用这种行列式可以给出一个关于函数系统线性相关与否的判别准则：

定理 4 函数系 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ 为线性相关的充分必要条件是 $\Delta(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)=0$。

【证】 若函数系为线性相关，则由定义可知有不全为 0 的数值 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\equiv 0$。于是将此式两边乘以 $\rho\varphi_1,\ \cdots,\ \rho\varphi_n$ 之后再积分，便得到下列方程组：

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(\varphi_k,\ \varphi_j)=0 \quad (j=1,\ \cdots,\ n)。$$

既然上面的齐方程组有非 0 解 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)\neq(0,\ \cdots,\ 0)$，故其系数行列式的值一定为 0，亦即 $\Delta(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)=0$。

反之，若 $\Delta_n=0$，则上述方程组将有非 0 解 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)\neq(0,\ \cdots,\ 0)$。显然，方程组可改写为

$$\int_a^b \rho\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\right)\varphi_j dx=0 \quad (j=1,\ \cdots,\ n)。$$

于是用 α_j 乘上式两边之后再取和，便得到

$$\int_a^b \rho\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\right)\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\varphi_j\right)dx=\int_a^b \rho\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\right)^2 dx=0。$$

这表明
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\equiv 0,$$
亦即函数系 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是线性相关的。证毕。

容易看出，如若 $\Delta_n\neq 0$，则必有 $\Delta_1\neq 0, \cdots, \Delta_{n-1}\neq 0$。事实上，若 $\Delta_k=0(k<n)$，则 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 便将是线性相关，从而 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots, \varphi_n$ 也将线性相关了。下面我们进一步来论证

定理5 若 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为线性无关，则 $\Delta_n>0$。

【证】 令 $\psi_n(x)$ 由如下行列式定义：

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix}(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \varphi_1\\ (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_2, \varphi_{n-1}) & \varphi_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \varphi_n\end{vmatrix}, \tag{4.1}$$

则用 $\rho\varphi_k(k\leqslant n)$ 乘上式两边之后再对 x 积分容易得知

$$(\psi_n, \varphi_k)=\begin{cases}\Delta_n, & k=n,\\ 0, & k<n。\end{cases} \tag{4.2}$$

事实上，当 $k<n$ 时，将(4.1)式右边行列式的最后一列乘以 $\rho\varphi_k$ 再对 x 积分之后便与前面的第 k 列相同。今将 $\psi_n(x)$ 的行列式展开，则

$$\psi_n(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\Delta_{n-1}\varphi_n(x)。 \tag{4.3}$$

既然 $\Delta_n\neq 0$，故 $\Delta_{n-1}\neq 0$，因而 $\psi_n(x)\equiv 0$。今再以 $\rho\psi_n$ 乘(4.3)式两边并积分，又注意 $(\psi_n, \psi_k)=0(k<n)$，则得

$$\int_a^b \rho\psi_n^2\,dx=\Delta_{n-1}(\varphi_n, \psi_n)=\Delta_{n-1}\Delta_n>0。$$

从而可见 Δ_n 与 Δ_{n-1} 的符号相同。依此类推，可知 Δ_n 与

$\varDelta_{n-1}, \cdots, \varDelta_1$ 的符号都相同。但 $\varDelta_1=(\varphi_1, \varphi_1)>0$，因此可以结论 $\varDelta_n>0$。定理于是得证。

于此，我们不准备重述实变函数论中的 Schmidt 直交化手续，而是要进一步指出直交函数的普遍结构公式。

定理 6 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 是 $L^2_\rho[a, b]$ 中的一个线性无关函数系（有限或可数），又设 $\psi_n(x)$ 的定义如前，则按下列公式便可造出一个标准直交系 $\{\omega_k\}$：

$$\omega_1(x)=\varphi_1(x)/\sqrt{\varDelta_1}, \quad \omega_k(x)=\psi_k(x)/\sqrt{\varDelta_k\varDelta_{k-1}} \quad (k\geqslant 2)。$$

【证】 为使 $\omega_k(x)$ 的表达式对一切 $k\geqslant 1$ 都通用，只需规定 $\varDelta_0=1$ 就可以了。今设 $1\leqslant n\leqslant k$，则根据定理 5 证明中已证明的公式(4.2)易得如下的内积：

$$\begin{aligned}
(\omega_n, \omega_k) &= \frac{(\psi_n, \psi_k)}{\sqrt{\varDelta_n\varDelta_{n-1}\varDelta_0\varDelta_{k-1}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varDelta_n\varDelta_{n-1}\varDelta_k\varDelta_{k-1}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\varphi_i+\varDelta_{n-1}\varphi_n, \psi_k\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varDelta_n\varDelta_{n-1}\varDelta_k\varDelta_{k-1}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\varphi_i, \psi_k)+\varDelta_{n-1}(\varphi_n, \psi_k)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varDelta_n\varDelta_{n-1}\varDelta_k\varDelta_{k-1}}}\varDelta_{n-1}(\varphi_n, \psi_k) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{当 } n=k \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n<k \text{ 时}。\end{cases}
\end{aligned}$$

注记 1 由定理 6 中的直交函数结构公式可以看出，每个 ω_n 都是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的线性组合。反过来还可看出，每个 φ_n 也都是 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的线性组合。事实上，由于已知 φ_1 是 ω_1 的线性组合，再利用递推关系

$$\varDelta_{n-1}\varphi_n=\psi_n-\alpha_1\varphi_1-\cdots-\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}, \quad \psi_n=\sqrt{\varDelta_n\varDelta_{n-1}}\,\omega_n$$

便可逐步推知每一个 φ_n 也都是 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的线性组合。

注记 2 令 $\omega_1(x)=\alpha\varphi_1(x)$，则由条件 $(\omega_1, \omega_1)=1$ 显然导致 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{(\varphi_1, \varphi_1)}}=\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}$。一般说来，当把每个 ω_k 表示成 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的线性组合时(实际也就是 Schmidt 标准直交化手续)，其中的系数也是唯一确定的。这一事实读者不难自行验证。因此可以断言，定理 6 中的直交函数结构公式的形式乃是唯一确定的(只有分母中的开方根号可以有正与负的两种选择)。

注记 3 依注记 1 可知，和所有 φ_k 都直交的函数也将和所有 ω_k 都直交，而且反之亦然。因此可以断言，函数系 $\{\varphi_k\}$ 与 $\{\omega_k\}$ 或者同时是完备的，或者同时是不完备的。

§ 5. 直交多项式的一般性质

在前面 § 3 中讨论广义 Fourier 展开时，我们已经知道利用直交函数的线性组合，能够对指定的函数作平方逼近。另一方面，从实际计算的能行性与简便性观点出发，我们曾一再强调过利用多项式函数作逼近工具是最理想的。因此人们自然就去考虑这样的问题：能否构造出种种最有用的直交多项式系统以便作为平方逼近的工具？

看来上述问题是有解答的。因为一则原始的幂函数系 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ 在任一闭区间 $[a, b]$ 上都是线性无关的；二则根据 Schmidt 直交化手续或直交函数结构公式 (§ 4 定理 5)，对于每一个函数 $\rho(x)$ 总是可以将该幂函数系进行直交化。

但我们还必须考虑这样一个更基本的问题，即不论 $\rho(x)$ 是怎样的权函数，多项式类是否总是在 L_ρ^2 中稠密？也就是问：是否对 L_ρ^2 中的每个函数都能用多项式作任意精确的逼近？事

实上，我们有如下的

定理 7 设 $f(x)\in L_\rho^2[a, b]$，则对任意 $\varepsilon>0$，都存在有多项式 $P(x)$ 使得 $\|f-P\|\leqslant\varepsilon$。

【证】 可分三步来证。首先证明有有界可测函数 $g(x)$ 使得 $\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{3}$。事实上，由于点集序列

$$E(|f(x)|>1)\supseteq E(|f(x)|>2)\supseteq\cdots,$$

因此点集 $E(|f|>n)$ 的测度的极限为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} mE(|f|>n)&=\lim_{n\to\infty} m\prod_{k=1}^{n}E(|f|>k)\\&=m\prod_{k=1}^{\infty}E(|f|>k)=0。\end{aligned}$$

又由于 Lebesgue 积分的绝对连续性，可知存在 $\delta>0$ 使得对含于 $[a, b]$ 中的任一可测子集 $\Delta(m\Delta<\delta)$ 有

$$\int_\Delta \rho(x)[f(x)]^2dx<\frac{\varepsilon^2}{9}。$$

今取 n 充分大，使得 $mE(|f|>n)<\delta$。于是引入有界可测函数 g：

$$g(x)=\begin{cases}0, & 当\ |f(x)|>n\ 时,\\ f(x), & 当\ |f(x)|\leqslant n\ 时,\end{cases}$$

便可以导出

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2&=\int_{E(|f|\leqslant n)}\rho(f-g)^2dx+\int_{E(|f|>n)}\rho(f-g)^2dx\\&=\int_{E(|f|>n)}\rho(f-g)^2dx=\int_\Delta\rho f^2dx<\frac{\varepsilon^2}{9}。\end{aligned}$$

这就表明确实存在有界可测函数 g 使得 $\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{3}$。

其次再证明对有界可测函数 $g(|g|\leqslant n)$，恒存在一连续函数 $\varphi(x)$ 使得 $\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{3}$。事实上，存在充分小正数 δ_0，使

得 $\Delta\subset[a, b]$, $m\Delta<\delta_0$ 时能保证

$$\int_\Delta \rho(x)dx<\frac{\varepsilon^2}{36n^2}.$$

根据 Лузин 定理知有连续函数 $\varphi(x)$ 满足条件: $|\varphi|<1$ 及 $mE(g\neq\varphi)<\delta_0$, 因而得到

$$\|g-\varphi\|^2=\int_{E(g=\varphi)}\rho(g-\varphi)^2dx+\int_{E(g\neq\varphi)}\rho(g-\varphi)^2dx$$

$$\leqslant(2n)^2\int_{E(g\neq\varphi)}\rho\,dx<\frac{\varepsilon^2}{9}。$$

这就表明有连续函数 φ 使得 $\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{3}$。

最后, 根据 Weierstrass 第一逼近定理, 可知恒存在多项式 $P(x)$ 使得

$$\|\varphi-P\|^2=\int_a^b\rho(\varphi-P)^2dx<\frac{\varepsilon^2}{9},$$

亦即有 $\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{3}$。因此利用范数的三角不等式便终于得到所希望证明的结果:

$$\|f-P\|\leqslant\|f-g\|+\|g-\varphi\|+\|\varphi-P\|<\varepsilon。$$

现在再让我们来注意这样一个事实: 假如对权函数 $\rho(x)$ 而言已经作出一个标准直交多项式系 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$, $\cdots$, 其中 $\varphi_n(x)$ 的次数正好是 n。那末对于任意给定的 n 次多项式 $P(x)$, 显然总可以取一适当常数 c, 使得 $P(x)-c\varphi_n(x)$ 降低成为 $n-1$ 次多项式。于是利用 $\varphi_{n-1}(x)$ 乘上适当常数去减它又可降低成为 $n-2$ 次多项式。依此类推, 便可知道: 凡 n 次多项式总可以用 φ_n, φ_{n-1}, $\cdots$, φ_0 的线性组合去表示。

如此, 上面所建立的多项式逼近定理又可改述成这样形式: "设 $f\in L^2_\rho$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 都存在着诸 φ_k 的某一线性组

合$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$，使得$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|<\varepsilon$”。这也可以概括成一句话："由$\{\varphi_k\}$中的函数的所有线性组合构成的类是在$L_\rho^2$中稠密的"。

回忆一下§3之最后总结中的等价命题8°，1°，2°及§4之最后的注记3，便易知下列两定理为真：

定理8 对权函数$\rho(x)$而言的标准直交多项式系$\{\varphi_n(x)\}$（φ_n的次数是n）是L_ρ^2空间中的完备直交系（亦即封闭直交系）。

定理9 幂函数系$1, x, x^2, \cdots$对任何L_ρ^2空间说来都是完备的。

经过以上的理论分析之后，可以看出，考虑如何去利用直交多项式系统来作为各空间L_ρ^2中的平方逼近工具是极有意义的问题。以下便进入较具体的讨论。

令$\rho(x)$为给定的权函数，$\{x^k\}$（$k=0, 1, 2, \cdots$）为给定在区间$[a, b]$上的幂函数系。称

$$\mu_n=\int_a^b \rho(x)x^n dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

为权函数$\rho(x)$的矩量。显然内积(x^p, x^q)可表成

$$(x^p, x^q)=\int_a^b \rho(x)x^{p+q}dx=\mu_{p+q}。$$

因而Gram行列式$\Delta(1, x, \cdots, x^n)$可记成

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}(1, 1) & (1, x) & \cdots & (1, x^n)\\ (x, 1) & (x, x) & \cdots & (x, x^n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x^n, 1) & (x^n, x) & \cdots & (x^n, x^n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n}\end{vmatrix}。$$

其次，§4中定理5证明中规定的$\psi_n(x)$函数可表成

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n\end{vmatrix}。$$

为方便计可规定 $\psi_0(x)\equiv1$, $\Delta_1\equiv1$。于是根据 § 4 中的定理 6, 便可以构造出如下的标准直交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)。$$

注意 $\varphi_n(x)$ 正好是次数为 n 的多项式，而且 x^n 的系数是 $\Delta_{n-1}/\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}=\sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n}\neq0$。总结一下，便是下面的定理:

定理 10 不论定义在 $[a, b]$ 上的权函数 $\rho(x)$ 如何，都存在有关于权 $\rho(x)$ 的标准直交多项式系 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, 其中 $\varphi_n(x)$ 正好是 n 次多项式, 其具体结构形式系由上列公式所给出。

在 § 4 最后的注记 2 中已经指出, 对于给定的权而言, 除每个直交函数的正负号容许选择之外，标准直交函数系是唯一确定的。因此在规定取正号之后, 定理 10 中的 $\varphi_n(x)$ 都是唯一存在的。此外值得再指出: $\{\varphi_n\}$ 的确定实际并不直接依赖于权函数 $\rho(x)$; 只要知道一串矩量 μ_0, μ_1, μ_2, $\cdots$ 的值也就可以造出 $\{\varphi_n\}$ 来。

如果所要求的只是直交多项式系, 而并不要求标准化, 那么直交系中的每一个函数除了可以变动一个常数因子之外, 其构造形式基本上也是唯一确定的。这就是下面的

定理 11 设 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots$ 是对权函数 $\rho(x)$ 的直交系，$f_n(x)$ 正好是 n 次多项式，而最高次项系数为 p_n，则诸 f_n 必可唯一地表示成

$$f_0(x)=p_0,\ f_n(x)=p_n\sqrt{\Delta_n/\Delta_{n-1}}\,\varphi_n(x)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

事实上，因为 $f_n(x)$ 可以表示成

$$f_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_n\varphi_n(x),$$

而且 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ 也可以表示成 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 的线性组合，因此由诸 $f_k(x)$ 间的直交性与诸 $\varphi_k(x)$ 间的直交性便推知当 $k\leqslant n-1$ 时恒有

$$(f_n,\ \varphi_k)=\alpha_k(\varphi_k,\ \varphi_k)=0\quad (\alpha_k=0)。$$

这就表明 $f_n(x)=\alpha_n\varphi_n(x)$。

注意 $f_n(x)$ 中 x^n 的系数为 p_n，而 $\alpha_n\varphi_n(x)$ 中 x^n 的系数为 $\alpha_n\sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n}$。因此由相等关系定出 α_n 的数值之后，也就得到定理的证明。

定理 12 设 $f(x)\in L^2_\rho$。则在所有次数不高于 n 的多项式 $P(x)$ 中，使平方偏差

$$\|f-P\|^2=\int_a^b\rho(x)\,[f(x)-P(x)]^2\,dx$$

达到其最小值的只有 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\quad (c_k=(f,\ \varphi_k)),$$

并且最小平方偏差是

$$\min\|f-P\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2。$$

这个定理是一般的 Toepler 定理的推论。注意标准直交多项式系 $\{\varphi_k\}$ 是封闭的，故有 Parseval 等式成立，因而最小平方偏差为

$$\|f-S_n\|^2=\int_a^b\rho\,[f]^2\,dx-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2。$$

这就是定理 12 的证明。多项式 $\varphi_n(x)$ 还有一个有趣的极值性质，亦即有

定理 13 在最高次项系数为 1 的所有 n 次多项式中，使积分 $(P,\ P)=\int_a^b\rho(x)\,[P(x)]^2\,dx$ 达到其最小值的多项式只有是

$$P(x)=\sqrt{\Delta_n/\Delta_{n-1}}\ \varphi_n(x)。$$

【证】 显然最高次项系数为 1 的 n 次多项式 $P(x)$ 恒可表作

$$P(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+\cdots+\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\sqrt{\Delta_n/\Delta_{n-1}}\ \varphi_n(x)。$$

因此选择多项式 $P(x)$ 就等于选择系数 $\alpha_0,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$。既然 $P(x)$ 本身为多项式且已表示成 $\varphi_0,\ \cdots,\varphi_n$ 的有穷级数（亦即 Fourier 级数部分和），故 Parseval 等式自然成立，亦即有

$$\int_a^b\rho(x)\,[P(x)]^2\,dx=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}。$$

这样一来，可见其最小值即由条件 $\alpha_0=\cdots=\alpha_n=0$ 所给出。定理于是获得证明。

我们知道各种直交多项式的根（亦称零点）恰好就是各种 Gauss 型求积公式的结点。因此关于根的性质的研究即使从求积的理论来看也是完全必要的。现在我们来证明如下的简单定理：

定理 14 标准直交系 $\{\varphi_n\}$ 中的多项式 $\varphi_n(x)$ 的所有根都是单实根，并且都在开区间 $(a,\ b)$ 之内。

【证】 假如 $\varphi_n(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内的根都是偶重根（即根的重

数为偶数)，则 $\varphi_n(x)$ 在 (a, b) 上便保持定号，因而 $\varphi_n(x)$ 与常数 $\varphi_0(x)$ 的直交性条件

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)dx=0$$

也就不可能成立。由此看来，可知在 (a, b) 内部必有奇重根。设奇重根的个数为 k，而 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ $(k<n)$ 为这些相异的奇重根，于是 $f(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)$ 为次数低于 $\varphi_n(x)$ 的多项式，故由直交性可知

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_n(x)dx=0。$$

但另一方面，$f(x)\varphi_n(x)$ 是只含偶重根的多项式，因此根据第一段的同样推理又知道上述积分不可能为0。这样一来，可见 $k<n$ 的假定是不对的。亦即必然有 $k=n$。这就说明 n 个根都是单实根。进一步我们还有如下的定理。

定理 15 设 $n\geq 1$，则 $\varphi_n(x)$ 和 $\varphi_{n+1}(x)$ 的根必相互交错。亦即 $\varphi_n(x)$ 的根 ξ_k 和 $\varphi_{n+1}(x)$ 的根 η_k 之间有如下的不等式关系：

$$a<\eta_1<\xi_1<\eta_2<\xi_2<\cdots<\xi_n<\eta_{n+1}<b。$$

应用数学归纳法，我们可以证明这个定理，这里不细说了。

令 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 表示最高次项系数是1的直交多项式(n 代表次数，$n=0, 1, 2, \cdots$)，则

$$\tilde{\varphi}_0(x)=1, \ \tilde{\varphi}_n(x)=\sqrt{\Delta_n/\Delta_{n-1}}\,\varphi_n(x)。$$

下面的定理给出了诸 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 间的一个递推关系。

定理 16 对一切 $n=0, 1, 2, \cdots$ 都成立着递推关系

$$\tilde{\varphi}_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\tilde{\varphi}_{n+1}(x)-\beta_{n+1}\tilde{\varphi}_n(x),$$

其中 α_{n+2} 与 β_{n+1} 为某些常数。

【证】 显然 $n+2$ 次多项式 $x\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$ 可以表示成

$$x\tilde{\varphi}_{n+1}(x)=c_0\tilde{\varphi}_0(x)+c_1\tilde{\varphi}_1(x)+\cdots+c_{n+2}\tilde{\varphi}_{n+2}(x)。$$

因左右两边最高次项系数均为1，故 $c_{n+2}=1$。其次，若用 $\rho(x)\tilde{\varphi}_k(x)$ 乘等式两边再积分(亦即取内积)，则于 $k\leqslant n-1$ 时由直交性可知左式即变为

$$c_k(\tilde{\varphi}_k,\ \tilde{\varphi}_k)=(\tilde{\varphi}_k,\ x\tilde{\varphi}_{n+1})=(x\tilde{\varphi}_k,\ \tilde{\varphi}_{n+1})=0。$$

因而 $c_k=0(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$。这样一来，可知原式即相当于

$$x\tilde{\varphi}_{n+1}(x)=c_n\tilde{\varphi}_n(x)+c_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}(x)+c_{n+2}\tilde{\varphi}_{n+2}(x),$$

这显然等价于定理中的递推公式。

最后，再让我们来确定常数 α_{n+2} 与 β_{n+1}。显然，若用 $\rho(x)\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$ 来乘定理中的递推公式的两边并积分，则得

$$\int_a^b\rho(x)\,(x-\alpha_{n+2})\,[\tilde{\varphi}_{n+1}(x)]^2\,dx=0。$$

因而得出
$$\alpha_{n+2}=\frac{\int_a^b\rho(x)x\tilde{\varphi}_{n+1}^2(x)\,dx}{\int_a^b\rho(x)\tilde{\varphi}_{n+1}^2(x)\,dx}。$$

注意上式左边分子积分中多出一个 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 因子，因而容易得出估计式 $a<\alpha_{n+2}<b(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。再用 $\rho(x)\tilde{\varphi}_n(x)$ 乘递推公式两边并积分，则得

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}\int_a^b\rho(x)\tilde{\varphi}_n^2(x)\,dx&=\int_a^b\rho(x)x\tilde{\varphi}_{n+1}\tilde{\varphi}_n\,dx\\&=\int_a^b\rho(x)\tilde{\varphi}_{n+1}[\tilde{\varphi}_{n+1}(x)+r(x)]\,dx\\&=\int_a^b\rho(x)\tilde{\varphi}_{n+1}^2\,dx,\end{aligned}$$

其中 $x\varphi_n=\varphi_{n+1}(x)+r(x)$，$r(x)$ 为低于 $n+1$ 次的多项式。故

$$\beta_{n+1}=\frac{\int_a^b \rho\tilde{\varphi}_{n+1}^2\,dx}{\int_a^b \rho\tilde{\varphi}_n^2\,dx}=\frac{(\Delta_{n+1}/\Delta_n)\,(\varphi_{n+1},\ \varphi_{n+1})}{(\Delta_n/\Delta_{n-1})\,(\varphi_n,\ \varphi_n)}$$

$$=\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}/\Delta_n^2\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

若记 $\Delta_{-1}=1$，则上列等式便对 $n=0$ 亦成立。

由定理 16 易推知 φ_{n+2} 与 φ_{n+1} 不能有公共根。假若不然，该根亦将是 φ_{n+1} 与 φ_n 的公共根，依次类推，最后将是 φ_1，φ_0 的公共根。但 $\varphi_0\equiv$ 常数 $\neq 0$，故得出矛盾。

最后，还值得指出：递推公式是很有用处的，因为利用它可以逐步确定出诸 $\tilde{\varphi}_n(x)$（或 $\varphi_n(x)$）的具体结构形式，而不必去展开 $\psi_n(x)$ 所代表的行列式。事实上，当 n 较大时，行列式 $\psi_n(x)$ 的展开是很麻烦的。

§6. 直交多项式级数的收敛性定理

设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是对权函数 $\rho(x)$ 的标准直交多项式系。又设 $f(x)$ 为空间 $C(a,\ b)$ 中的一函数。现在我们要研究在怎样的条件下，连续函数 f 的广义 Fourier 级数 $\sum c_k\varphi_k(x)$ 能在通常的意义下收敛于 $f(x)$。

以 $S_n(x)$ 表示级数的第 n 部分和

$$S_n(x)\equiv S_n[f;\ x]=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)。$$

注意 Fourier 系数 c_k 具有表达式

$$c_k=\int_a^b \rho(t)f(t)\varphi_k(t)\,dt,$$

因此代入后即得出

$$S_n(x)=\int_a^b \rho(t)f(t)\Big[\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\Big]dt。$$

这相当于普通 Fourier 级数理论中的 Dirichlet 积分，而表

达式

$$K_n(t,\ x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

可称之为广义 Dirichlet 核(简称为核)。

显然,不高于 n 次的多项式 $P_n(x)$ 按直交多项式 $\{\varphi_k\}$ 展开所得的第 n 部分和 $S_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 等同的:

$$S_n[P_n;\ x]\equiv P_n(x),$$

于是

$$S_n[f-P_n;\ x]=S_n[f;\ x]-S_n[P_n;\ x]=S_n[f;\ x]-P_n(x),$$

两边各加 $-f(x)$ 并移项,则得出

$$S_n[f;\ x]-f(x)=P_n(x)-f(x)+S_n[f-P_n;\ x],$$

$$|S_n[f;\ x]-f(x)|\leqslant|P_n(x)-f(x)|+|S_n[f-P_n;\ x]|。$$

既设 $f(x)$ 为连续函数,故存在最佳逼近 $E_n(f)$(参考第二章),而 $|P_n(x)-f(x)|\leqslant E_n(f)\to 0\ (n\to\infty)$。因此 $|S_n[f;\ x]-f(x)|$ 是否趋向于 0 的问题归结为是否 $|S_n[f-P_n;\ x]|\to 0$ 的问题。

显然

$$\begin{aligned}|S_n[f-P_n;\ x]|&=\left|\int_a^b\rho(t)[f(t)-P_n(t)]K_n(t,\ x)dt\right|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-P_n(t)|\int_a^b\rho(t)|K_n(t,\ x)|dt\\&\leqslant E_n(f)\int_a^b\rho(t)|K_n(t,\ x)|dt\\&=E_n(f)L_n(x),\end{aligned}$$

其中 $L_n(x)\equiv\int_a^b\rho(t)|K_n(t,\ x)|dt$ 称为 Lebesgue 函数。

这样,便总结出如下的收敛性定理:

定理 17 设 $f(x)$ 为连续函数,则当条件

$$E_n(f)L_n(x)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

满足时便有收敛的 Fourier 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)=f(x)。$$

又若在 $[a, b]$ 上 $E_n(f)L_n(x)\xrightarrow{1} 0$, 则上列级数便是一致收敛的。

这个定理是很有应用价值的。在下一节讲述 Legendre 多项式级数时就要用到它。

注记 利用§5中所讲的递推公式, 可以证明广义 Dirichlet 核 $K_n(t, x)$ 能简单地表示成

$$K_n(t, x)=\frac{\sqrt{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}}{\Delta_n}\frac{\varphi_{n+1}(t)\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(t)}{t-x}$$

$$(t\neq x)。$$

这叫做 Christoffel-Darboux 公式。根据这公式可以建立另外一些收敛性定理。例如, 假设对固定的点 x, 序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 为有界。又设 $\mu(t)=\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ 属于空间 L_ρ^2。那末在 x 点处等式 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)=f(x)$ 便成立(这定理的详细证明可参考 Натансон 的《函数构造论》第二篇第四章§4)。

§7. 几种特殊的直交多项式

在这最后一节里我们要简略地介绍一下三种最著名的直交多项式系, 即 Legendre 多项式系 $\{P_n(x)\}$, Laguerre 多项式系 $\{L_n(x)\}$ 和 Hermite 多项式系 $\{H_n(x)\}$。这三种多项式无论在数学物理方法中或积分近似计算理论中都居于重要的地位。

1. Legendre 多项式

在区间$[-1, 1]$上对于权函数$\rho(x)\equiv 1$构成直交系的多项式$P_n(x)$称为 Legendre 多项式($n=0, 1, 2, \cdots$)。自然,我们可以根据§4中所讲述的一般结构公式(定理6)来找出$P_n(x)$的显明表达式。然而行列式的计算毕竟是很麻烦的。事实上,早在1814年 Rodrigue 就已经找到了一个极简单而便利的表达式:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n。$$

容易看出,这确实是一个n次多项式,而且x^n项的系数是

$$\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}。$$

因而当规定最高次项系数为1时,多项式可表作

$$\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n。$$

现在来验证上述多项式系确实是关于权函数$\rho(x)\equiv 1$的直交系。记$\varphi(x)=(x^2-1)^n$,则$\varphi^{(k)}(\pm 1)=0(0\leqslant k\leqslant n-1)$,而且$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\varphi^{(n)}(x)$。

设$Q(x)$为次数不高于n的任意多项式,则由分部积分法易算出

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)dx\\
&=\frac{1}{2^n n!}\left\{[Q(x)\varphi^{(n-1)}(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)dx\right\}\\
&=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)dx=\cdots\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x)\varphi(x)dx。
\end{aligned}$$

因此假如 $Q(x)$ 的次数低于 n，则 $Q^{(n)}(x)\equiv 0$，从而 $Q(x)$ 便和 $P_n(x)$ 相直交。这就表明 $P_n(x)$ 是与 $P_{n-1}(x)$, $\cdots$, $P_1(x)$, $P_0(x)$ 都直交的。因而 $\{P_n(x)\}$ 确实是 $[-1, 1]$ 上的直交系。

若在上列计算中取 $Q(x)=P_n(x)$，则

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}。$$

因此标准直交函数可以表作

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n。$$

根据一般理论，可知 $P_n(x)$ 的所有根都是单实根，且位于开区间 $(-1, 1)$ 之内。以下我们给出 $P_n(x)$ $(n=0, 1, \cdots, 5)$ 的显明表达式以供参考：

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)。$$

事实上，根据 Rodrigue 公式，利用二项式展开定理及逐项微分容易得到如下的普遍表达式：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{(n/2)}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}。$$

$P_n(x)$实际是下列 Legendre 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$$

在正规点 $x=0$ 附近满足条件 $y(1)=1$ 的唯一确定的多项式解。要证明这一点，只需利用微分方程的幂级数解法就行。这里不准备叙述它的具体计算方式。事实上，反过来将 $P_n(x)$ 代入上述微分方程加以验证亦可，同时亦可根据 $P_n(x)$ 的表达式去验证 $P_n(1)=1$（不妨留给读者作习题）。

现在我们来证明 $P_n(x)$ 有如下的母函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n \quad (|z|<1)。$$

在验证之前，记上式的左端为 $G(x, z)$：

$$G(x, z)=[1+(z^2-2xz)]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)z^n。$$

我们的目标就是要去证明 $A_n(x)\equiv P_n(x)$。

首先根据二项展开式的形式容易看出 z^n 的系数 $A_n(x)$ 的确是 x 的 n 次多项式。其次，倘令 $x=1$ 代入，则

$$G(1, z)=(1-z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(1)z^n,$$

因而可知 $A_n(1)=1$。如此看来，可见只要再验证 $A_n(x)$ 满足 Legendre 微分方程就够了。

对 z 微分 $G(x, z)$，稍加变形即得

$$(1-2xz+z^2)\frac{\partial G}{\partial z}=(x-z)G。$$

再对 x 微分 G，由比较可得

$$z\frac{\partial G}{\partial z}=(x-z)\frac{\partial G}{\partial x}。$$

以 $G=\sum A_n z^n$ 分别代入上列二式的两边，并分别比较 z^{n-1} 和

z^n 的系数，分别得出

$$nA_n-(2n-1)xA_{n-1}+(n-1)A_{n-2}=0,$$

$$x\frac{dA_n}{dx}-\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_n。$$

如果将上列第一式对 x 微分，并利用第二式(其中令 n 改为 $n-1$) 消去 dA_{n-2}/dx，则得出

$$\frac{dA_n}{dx}-x\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_{n-1}。$$

又利用上列第二式乘以 $-x$ 再与此处所得之式相加，则得出

$$(1-x^2)\frac{dA_n}{dx}=n(A_{n-1}-xA_n)。$$

再对 x 微分此最后所得之式，化简后得

$$(1-x^2)\frac{d^2A_n}{dx^2}-2x\frac{dA_n}{dx}+n(n+1)A_n=0。$$

这就证实了 $A_n(x)$ 确实满足 Legendre 方程，并且 $A_n(1)=1$。由于多项式解的唯一性，就可以结论出 $A_n(x)\equiv P_n(x)$。

利用母函数可以证明如下的不等式：

$$|P_n(x)|\leqslant 1\quad(n=0,\ 1,\ \cdots)。$$

事实上，令 $x=\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$ 代入母函数公式后，易得出

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)z^n\\&=[1-z(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+z^2]^{-\frac{1}{2}}=(1-ze^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}\\&=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-ze^{i\theta})^k\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{s}(-ze^{-i\theta})^s\right]。\end{aligned}$$

当 $|z|<1$ 时右端二幂级数是可以相乘的。因此在左右两端比较 z^n 的系数后得出

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}[e^{in\theta}+e^{-in\theta}]$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!}e^{i(2k-n)\theta}。$$

注意上式右边各项的系数均为正，而各项将于 $\theta=0$ 时达到最大值。这样便推出

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant P_n(\cos\theta)=P_n(1)=1。$$

这就证明了所需要的不等式。

按 Legendre 多项式展开 我们已证得

$$|P_n(x)|\leqslant 1,\quad \hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)。$$

由此可知对应于直交系 $\{P_n\}$ 的核 $K_n(t, x)$ 具有估计式

$$|K_n(t, x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(t)\hat{P}_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}。$$

从而相应的 Lebesgue 函数具有估计式

$$L_n(x)=\int_{-1}^{1}|K_n(t, x)|dt\leqslant(n+1)^2。$$

这样，根据 § 6 中所建立的收敛性定理，便知凡最佳逼近满足条件

$$n^2E_n(f)\to 0\quad(n\to\infty)$$

的每一连续函数 $f(x)$，都可按 Legendre 多项式展成在全区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛的广义 Fourier 级数。根据 Jackson 定理（见第三章）知道，凡有连续二阶微商的函数 $f(x)$ 都满足上述条件，因此有如下的

定理 18 设定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 具有连续的二阶微商 $f''(x)$。则 $f(x)$ 按 $\{P_n(x)\}$ 展成的广义 Fourier 级数一致收敛到它自身。

最后还值得提到关于 $P_n(x)$ 的一个递推公式:

$$nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)=0。$$

这在论证 $P_n(x)$ 的母函数时实际已经得到了，只要在那儿将 A_n 改换成 $P_n(x)$ 就可以。自然，如果应用 §5 中的一般公式(定理 16)，那也同样可以得到上述结果。

2. Laguerre 多项式

以前所讨论的一切，都是一直假定基本区间 $[a, b]$ 是有限的。其实，权函数，L_ρ^2 空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形。所谓 Laguerre 多项式系 $\{L_n(x)\}$，就是在区间 $(0, +\infty)$ 上关于权函数 e^{-x} 所构成的直交系。它们可以用类似于 Rodrigue 公式的表达式来定义:

$$L_n(x)=e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x})。$$

只要将上式右端的微商算出，就知道 $L_n(x)$ 是 n 次多项式:

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},$$

其中最高次项系数显然是 $(-1)^n$，因此

$$\tilde{L}_n(x)=(-1)^ne^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x})$$

便是最高次项系数为 1 的 Laguerre 多项式。

记 $U_n(x)=x^ne^{-x}$，则它的逐次微商满足条件

$$U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(+\infty)=0$$

$$(k=0, 1, \cdots, n-1)。$$

因此假如 $V(x)$ 是次数不高于 n 的多项式，则由分部积分法易算出

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) V(x) dx$$

$$= \int_0^\infty U_n^{(n)} V\, dx$$

$$= [U_n^{(n-1)} V + \cdots + (-1)^{n-1} U_n V^{(n-1)}]_0^\infty + (-1) \int_0^\infty U_n V^{(n)} dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty U_n V^n dx。$$

因此当 V 的次数低于 n 时，上面的最后结果便是零。这表明 L_n 是与一切次数较低的多项式相直交的。从而也就证明 $\{L_n\}$ 是关于权 e^{-x} 的直交系。

又如果在以上的计算中取 $V = L_n(x)$，则

$$\int_0^\infty e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = (-1)^n \int_0^\infty U_n \cdot (-1)^n n!\, dx$$

$$= n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2。$$

从而可知标准化了的直交函数应该写成

$$\hat{L}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})。$$

3. Hermite 多项式

所谓 Hermite 多项式系 $\{H_n(x)\}$，就是在区间 $(-\infty, \infty)$ 上关于权函数 e^{-x^2} 所构成的直交系，它可以通过如下的表达式来定义：

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2})。$$

将上式右端的微商逐步算出，就知道 $H_n(x)$ 是 n 次的多项式，而且用归纳法容易证明它的最高次项系数是 $(-2)^n$。

记 $u = e^{-x^2}$，则 $u^{(k)}(-\infty) = u^{(k)}(+\infty) = 0 (k = 0, 1, 2, \cdots)$。因此对任何次数不高于 n 的多项式 $V(x)$，利用逐次分部积分

法同样可得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) V(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} V^{(n)}(x)\, dx,$$

因此当 V 的次数低于 n 时，上式右端便是零，这证明了 $\{H_n\}$ 确实是关于权 e^{-x^2} 的直交系。

其次，如果在上式中取 $V(x) = H_n(x)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-2)^n n!\, dx$$
$$= 2^n n! \sqrt{\pi}。$$

因而标准直交函数的形式应该是

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)。$$

注记 直交多项式(特别是许多特殊的直交多项式)的各种性质的探讨，迄今为止已经积累了极丰富的文献与成果。许多有用的结果(定理及公式等等)已经扼要地概括在 A. Erdelyi 主编的《高级超越函数》(1953 年出版，有中译本)的巨著中。如果想对直交多项式的诸基本理论及应用作进一步的研习，那末 G. Szegö 的经典著作《直交多项式》(1938 年出版)当是值得介绍的。此外，如想知道直交多项式在机械求积理论中的许多应用，建议读者去参考 И. П. Натансон 的《函数构造论》一书的第三部分，在那里，读者会见到足够完备的讨论。

第五章习题

1. 单原子波函数的形式为 $J = ae^{-pt^2}$，试按下列等精确度数据决定参数 a，p：

t	0	1	2	3
J	2.010	1.210	0.740	0.450

2. 设 F 为 m 维向量，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 为直交向量组；又设 F_n 表 F 关于 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 的直交展开：

$$F_n=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j \quad (n\leqslant m).$$

试证明

$$\|F-F_n\|^2=\|F\|^2-\sum_{j=1}^{n}c_j^2(\varphi_j, \varphi_j).$$

3. 证明三角插值多项式可表成下列形式：

$$S_m(x)=\frac{1}{2m+1}\sum_{k=-m}^{m}y_k\frac{\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)x-k\alpha\right]}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\alpha}{2m+1}\right)},$$

并用之证明当 $f(x)$ 连续可微时 $S_m(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。

〔提示〕 将 $f(x)$ 的 Fourier 级数用 Dirichlet 核表示之。

4. 于依权 $\rho(x)$ 平方可积函数类中验证其范数满足下列条件：

(i) $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$，$\lambda$ 为任意数；

(ii) $|(f, g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$ (Cauchy-Буняковский 不等式)；

(iii) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ （三角不等式）。

5. 试证明直交函数系 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x), \cdots$ 于函数类 F 中完全的充要条件是，对于任何函数 $f\in F$，若 $\|f\|\neq 0$，则其 Fourier 系数不全为零。

6. 试证明 §6 注记中的 Christoffel-Darboux 公式。

7. 设 $P_n(x)$ 为次数不超过 n 的多项式，试证明

$$(P_n(x), K_n(x, t))=P_n(t),$$

其中 $K_n(x, t)$ 为核多项式。

8. 试求 $|x|$ 关于 Legendre 多项式及第一，二类 Чебышев 多项式的展开式。

第六章 样条函数逼近

在第二章中我们已经讨论了在有限闭区间内的任一连续函数用多项式一致逼近的可能性问题。指出了有限闭区间上的任一连续函数，都可以用多项式逼近至任意精确程度。或者说，多项式类是在整个连续函数类中处处稠密的。那么在函数逼近论范畴里，是否就没有必要引进其它逼近工具了呢？许多事实表明情况并非如此。

首先由于多项式是幂级数的特例，它在一点附近的性质就足以决定其整体性质。然而，自然界较大范围内的许多现象，例如物理或生物现象间的关系却往往呈现互不关联、互相割裂的本性。换言之，在两个不同的区域内，它们的性状可以完全不相关。另外，从数学上来说，例如在多项式插值理论中，由 n 个插值结点所作的插值多项式是一个 $n-1$ 次的多项式，它通常可能有 $n-3$ 个拐点，对于某些比较平滑（平坦）的函数来说，这自然是不理想的。

本章将要介绍的样条函数是一种分段多项式，在各段的多项式之间又具有某种连接性质。正因为如此，样条函数既保持了多项式的简单性和可逼近性，又在各段之间保持了相对独立的局部性质。近三十多年来，样条函数已成为最有成效的逼近工具之一。

§1 主要介绍样条函数的各种定义以及某些基本重要的性质。

为了理论和实际计算的需要，在§2 中我们扼要介绍了 B 样条及其性质。

§3 中简要介绍了著名的 Hermite 插值公式，它可以作为推导一些样条函数计算格式的理论基础。§4 中就实际中最常用的 3 次样条函数的具体计算方法作了稍稍详细的讨论。

§1. 样条函数及其基本性质

设给定一组结点

$$-\infty=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=\infty。\qquad(1.1)$$

又设分段函数 $S(x)$ 满足条件：

1° 于每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ $(j=0, \cdots, N)$ 上，$S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数代数多项式；

2° $S(x)$ 于 $(-\infty, \infty)$ 上具有一直到 $n-1$ 阶的连续导数。

则称 $y=S(x)$ 为 n 次样条函数。常把以 (1.1) 为结点的 n 次样条函数的总体记为 $\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$。$x_1, \cdots, x_N$ 称为样条结点。

一个(奇次) $2n-1$ 次样条函数 $y=S(x)$，如果其在区间 $(-\infty, x_1]$ 与 $[x_N, \infty)$ 上的表达式都是 $n-1$ 次多项式(并不要求该两 $n-1$ 次多项式相同)，则特别称之为 $2n-1$ 次的自然样条函数。以 (1.1) 为结点的 $2n-1$ 次自然样条函数的总体记为 $\mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$。显然

$$\mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)\subset\mathscr{S}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)。\qquad(1.2)$$

下面来给出样条函数类 $\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 中任一样条函数的一般表达式。

对于任意给定的以 (1.1) 为结点的 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，根据定义，其在每个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ $(j=0, \cdots, N)$ 上均为一 n 次多项式。特别地，于子区间

$(-\infty, x_1]$内是一 n 次多项式。不妨设该多项式为 $p_n(x)\in H_n$。

今考虑 $S(x)$ 于 $[x_1, x_2]$ 上的表达式。由定义，$S(x)$ 于 $[x_1, x_2]$ 上的表达式仍为一个 n 次多项式。若设该 n 次多项式为 $q_n(x)$，并考虑下述 n 次多项式的性质：

$$\eta(x)=q_n(x)-p_n(x)。$$

按 n 次样条函数的定义，$p_n(x)$ 与 $q_n(x)$ 于点 $x=x_1$ 处的值以及1阶、2阶、一直到 $n-1$ 阶导数值皆相等：

$$p_n^{(i)}(x_1)=q_n^{(i)}(x_1) \quad (i=0, \cdots, n-1),$$

亦即 $$\eta^{(i)}(x_1)=0 \quad (i=0, \cdots, n-1)。$$

是故 $x=x_1$ 是 $\eta(x)$ 的 n 重根，即 $\eta(x)$ 含 $(x-x_1)^n$ 这个因子。由于 $\eta(x)$ 是一 n 次多项式，所以存在某常数 c_1，使得

$$\eta(x)=c_1(x-x_1)^n, \tag{1.3}$$

亦即

$$q_n(x)=p_n(x)+c_1(x-x_1)^n。 \tag{1.4}$$

它说明 $S(x)$ 于区间 $[x_1, x_2]$ 上的表达式恰为其前一区间上的表达式加上 $(x-x_1)^n$ 的某一常数倍。这样一来，$S(x)$ 于 $(-\infty, x_2]$ 上的统一表达式应为

$$S(x)=\begin{cases}p_n(x), & -\infty<x\leqslant x_1, \\ p_n(x)+c_1(x-x_1)^n, & x_1\leqslant x\leqslant x_2。\end{cases} \tag{1.5}$$

为把(1.5)写成一个统一的表达式，引入记号

$$x_+=\max(0, x)=\begin{cases}x, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} \tag{1.6}$$

$$x_+^m=(x_+)^m,$$

则(1.5)所示的 $S(x)$ 又可紧凑地表示为

$$S(x)=p_n(x)+c_1(x-x_1)_+^n \quad (-\infty<x\leqslant x_2)。$$

继续采用这种分析方法，可得 $S(x)$ 于整个实轴上的表达式为

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^n \quad (-\infty<x<\infty)。\quad (1.7)$$

此即为

定理 1 任一 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 均可唯一地表现为

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^n \quad (-\infty<x<\infty), \quad (1.8)$$

其中 $p_n(x)\in H_n$, $c_j(j=1, \cdots, N)$ 为实数。

显然，由 (1.8) 式所给出的任一函数 $S(x)$ 必然满足 n 次样条函数的定义，也即 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$。因而定理 1 可进一步写成

定理 2 为使 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，必须且只须存在 $p_n(x)\in H_n$ 和 N 个实数 $c_1, c_2, \cdots, c_N$，使得 (1.8) 式成立：

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^n \quad (-\infty<x<\infty)。$$

定理 1 和定理 2 说明函数系

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, (x-x_1)_+^n, \cdots, (x-x_N)_+^n \quad (1.9)$$

构成 n 次样条函数类 $\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的一组基底。

因为由 (1.2) 和定理 2 可知，任一 $S(x)\in\mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 均可表为

$$S(x)=p_{n-1}(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty<x<\infty), \quad (1.10)$$

其中 $p_{n-1}(x)\in H_{n-1}$。

当然一函数 $S(x)$ 只是满足 (1.10) 还不足以保证它一定是一个自然样条函数。因为它在 $[x_N, \infty)$ 上是否为一个 $n-1$ 次的多项式尚不能保证，为保证这点，便须要求 $S(x)$ 于 $[x_N, \infty)$ 中的表达式

$$p_{n-1}(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)^{2n-1}$$

为一 $n-1$ 次多项式。即要求上述求和号这一项中 n 次以上的方幂项之系数为 0。但

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)^{2n-1}\\
&\quad=\sum_{j=1}^{N}c_j\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i}x^i(-x_j)^{2n-1-i}\\
&\quad=\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i}x^i\sum_{j=1}^{N}c_j(-x_j)^{2n-1-i}\\
&\quad=\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i-1}\binom{2n-1}{i}x^i\sum_{j=1}^{N}c_jx_j^{2n-1-i}。
\end{aligned}$$

要求上式中 $x^n, \cdots, x^{2n-1}$ 的系数为 0，即得

$$\sum_{j=1}^{N}c_jx_j^k=0 \quad (k=0, 1, \cdots, n-1)。 \tag{1.11}$$

这样我们就证明了

定理 3 为使 $S(x)\in\mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，必须且只须存在 $p_{n-1}(x)\in H_{n-1}$ 和满足线性约束(1.11)的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_N$，使得

$$S(x)=p_{n-1}(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty<x<\infty)。 \tag{1.12}$$

下面讨论样条函数的积分关系式。先给出

定理 4 设 $S(x)$ 由(1.8)所给出，其中 $n=2k-1$，且

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_N<b。 \tag{1.13}$$

又设 $f(x)$ 满足下述三性质：

1° $f(x)\in C^{k-1}[a, b]$ 且 $f^{(k)}(x)$ 于每个开区间 (x_i, x_{i+1})

$(i=0, \cdots, N)$ $(x_0=a,\ x_{N+1}=b)$ 内连续;

2° $f^{(k-r-1)}(x)S^{(k+r)}(x)=0 \quad (r=0,1,\cdots,k-2;\ x=a,b)$;

3° $f(a)S^{(2k-1)}(a+0)=f(b)S^{(2k-1)}(b-0)=0$。

则

$$\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)dx$$
$$=(-1)^k(2k-1)!\sum_{i=1}^N c_i f(x_i)。 \tag{1.14}$$

【证】 逐次采用分部积分法, 有

$$\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)dx$$
$$=\sum_{r=0}^{k-2}(-1)^r[f^{(k-r-1)}(b)S^{(k+r)}(b)-f^{(k-r-1)}(a)S^{(k+r)}(a)]$$
$$+(-1)^{k-1}\int_a^b f'(x)S^{(2k-1)}(x)dx。 \tag{1.15}$$

按条件 2°, 上式右端的求和项等于 0。因为 $S^{(2k-1)}(x)$ 是一个阶梯函数, 所以(1.15)右端积分可表为下形积分的和:

$$\eta_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)dx=\eta_i[f(x_{i+1})-f(x_i)], \tag{1.16}$$

其中 η_i 是 $S^{(2k-1)}(x)$ 于 $(x_i,\ x_{i+1})$ 中的值(为常数)。将(1.16)右端部分对 i 求和并重新整理项, 给出

$$\sum_{i=1}^N f(x_i)[S^{(2k-1)}(x_i-0)-S^{(2k-1)}(x_i+0)]$$
$$+f(b)S^{(2k-1)}(b-0)-f(a)S^{(2k-1)}(a+0)。 \tag{1.17}$$

按条件 3°, 上式后两项为 0。又由(1.8)逐项微分可知

$$S^{(2k-1)}(x_i+0)-S^{(2k-1)}(x_i-0)=(2k-1)!c_i \tag{1.18}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)。$$

综合(1.15)~(1.18), 即得

$$\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)dx$$
$$=(-1)^{k-1}\int_a^b f'(x)S^{(2k-1)}(x)dx$$
$$=\sum_{i=1}^N f(x_i)\left[S^{(2k-1)}(x_i-0)-S^{(2k-1)}(x_i+0)\right]$$
$$=(-1)^k(2k-1)!\sum_{i=1}^N c_i f(x_i)。$$

定理证毕。

推论 1 若在定理 4 的条件外，再设 $f(x)$ 于 $x_1, \cdots, x_N$ 处皆为 0，则

$$\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)dx=0。$$

推论 2 设样条结点由(1.13)给出，$S(x)$ 为由(1.10)给出的自然样条函数 $(n>1)$，且设 $f(x)\in C^{n-1}[a, b]$，$f^{(n)}(x)$ 于每个区间 (x_i, x_{i+1}) 内连续 $(i=0, \cdots, N)$ $(x_0=a, x_{N+1}=b)$，则

$$\int_a^b f^{(n)}(x)S^{(n)}(x)dx=(-1)^n(2n-1)!\sum_{i=1}^N c_i f(x_i)。$$

若还有 $f(x_i)=0(i=1, \cdots, N)$，则

$$\int_a^b f^{(n)}(x)S^{(n)}(x)dx=0。$$

【证】 因为 $S(x)\in \mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，从而 $S^{(n)}(x)\in \mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，且

$$S^{(n)}(x)=0,\ x<x_1 \text{ 和 } x>x_N。$$

由定理 4 和推论 1 即可知推论 2 成立。

对于自然样条函数插值的存在、唯一性，有下面的

定理 5 设 $1\leqslant n\leqslant N$，则对任意给定的 $y_1, y_2, \cdots, y_N$，存在唯一的自然样条函数 $S(x)\in \mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，使得

$$S(x_j)=y_j \quad (j=1, \cdots, N)。 \tag{1.19}$$

【证】 由定理 3，为证本定理，只须证明线性方程组

$$p_{n-1}(x_j)+\sum_{i=1}^{N} c_i(x_j-x_i)_+^{2n-1}=y_j \quad (j=1, \cdots, N), \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^k=0 \quad (k=0, \cdots, n-1)$$

对任意给定的 $y_1, \cdots, y_N$ 皆有唯一解。由线代数理论，只须证明与(1.20)相应的齐方程只有零解即可。设

$$S_0(x)\in \mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, \cdots, x_N)$$

且满足

$$S_0(x_j)=0 \quad (j=1, \cdots, N), \tag{1.21}$$

即设 $S_0(x)$ 相应表达式(见(1.12))系数满足与(1.20)相对应的齐方程。考虑

$$\sigma(S_0)=\int_a^b [S_0^{(n)}(x)]^2 dx,$$

其中 $[a, b]$ 满足(1.13)式。于推论 2 中，取 $f(x)=S(x)-S_0(x)$，并利用(1.21)可知

$$\sigma(S_0)=\int_a^b [S_0^{(n)}(x)]^2 dx=0,$$

于是
$$S_0^{(n)}(x)\equiv 0 \quad (a\leqslant x\leqslant b)。$$

由此可知 $S_0(x)$ 是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式。

又由(1.21)，$S_0(x)$ 竟然于 $N(\geqslant n)$ 个互异点处为 0，是故

$$S_0(x)\equiv 0。$$

定理证毕。

定理 5 从理论上指明了自然样条函数插值的存在唯一性。这不仅有重大的理论意义，而且在实际计算中有一定的指导意义。

下面介绍自然样条函数插值的所谓最光滑性质，它是首

先由 J. C. Holladay 于 1957 年给出的。

定理 6 设 $1\leqslant n\leqslant N$, 且

$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_N\leqslant b_{\circ}$$

又设 $S(x)\in\mathfrak{N}_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$是满足插值条件

$$S(x_j)=y_j\quad (j=1, \cdots, N)\tag{1.22}$$

的自然样条函数。则对任何满足 (1.22) 的函数 $f(x)\in C^n[a, b]$:

$$f(x_j)=y_j\quad (j=1, \cdots, N)$$

必有

$$\int_a^b [S^{(n)}(x)]^2 dx\leqslant\int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx_{\circ}\tag{1.23}$$

且等号仅当 $f(x)\equiv S(x)$时才成立。

【证】 根据自然样条函数的定义,

$$S^{(n)}(x)=0,\quad x\leqslant x_1 \text{ 或 } x\geqslant x_{N\circ}$$

为证(1.23), 只须证明

$$\int_{x_1}^{x_N}[S^{(n)}(x)]^2 dx\leqslant\int_{x_1}^{x_N}[f^{(n)}(x)]^2 dx_{\circ}$$

显然

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_N}[f^{(n)}(x)]^2 dx\\&\quad=\int_{x_1}^{x_N}[S^{(n)}(x)]^2 dx+\int_{x_1}^{x_N}[f^{(n)}(x)-S^{(n)}(x)]^2 dx\\&\qquad+2\int_{x_1}^{x_N}S^{(n)}(x)[f^{(n)}(x)-S^{(n)}(x)]dx_{\circ}\end{aligned}$$

对上述右端第三个积分作分部积分, 得

$$2(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}S^{(2n-1)}(x)[f'(x)-S'(x)]dx_{\circ}$$

按自然样条函数的定义, $S^{(2n-1)}(x)$于每个子区间(x_j, x_{j+1})内为常数, 而按插值条件, $f(x)-S(x)$ 又在该区间的两端 x_j 与

x_{j+1} 处为 0。所以上述积分为 0，即

$$\int_{x_1}^{x_N}[f^{(n)}(x)]^2dx=\int_{x_1}^{x_N}[S^{(n)}(x)]^2dx$$
$$+\int_{x_1}^{x_N}[f^{(n)}(x)-S^{(n)}(x)]^2dx。\quad (1.24)$$

从而不等式(1.23)成立。

最后，若设(1.23)中的等号成立，则由(1.24)可知

$$f^{(n)}(x)-S^{(n)}(x)\equiv 0 \quad (x_1\leqslant x\leqslant x_N),$$

从而 $f(x)-S(x)\in H_{n-1}$ 为一 $n-1$ 次多项式。又由 $f(x)$ 及 $S(x)$ 所满足的插值条件，这个 $n-1$ 次多项式于 $N(\geqslant n)$ 个互异点处为 0，于是其必恒为 0，即 $f(x)\equiv S(x)$。定理 6 证毕。

若于定理 6 中取 $n=2$，则(1.23)成为

$$\int_a^b[S''(x)]^2dx\leqslant\int_a^b[f''(x)]^2dx。\quad (1.25)$$

我们知道，一个函数当其一阶导数较小时，其二阶导数与其曲率值是很接近的

$$y''\approx\kappa=y''/(1+y'^2)^{3/2}。$$

而曲率小，在几何上理解为"平滑"当然是很自然的。因此常称自然样条函数插值是*最光滑* (smoothest) 曲线插值。

下面给出在理论和应用中都十分有用的 Peano 定理。

设 L 表示对任意 $f(x)\in C^n[a, b]$ 定义的线性算子

$$L(f)=\sum_{r=0}^{n}\int_a^b f^{(r)}(x)d\mu_r(x), \quad (1.26)$$

其中 $\mu_r(x)$ 是有界变差函数。

定理 7(Peano) 设对一切 n 次多项式 $p(x)\in H_n$，均有 $L(p)=0$。则对所有 $f(x)\in C^{n+1}[a, b]$，$L(f)$ 恒可表现为

$$L(f)=\int_a^b f^{(n+1)}(t)K(t)dt, \quad (1.27)$$

其中 $$K(t)=\frac{1}{n!}L_x[(x-t)_+^n],$$

$L_x[(x-t)_+^n]$ 表示视其中 $(x-t)_+^n$ 为 x 的函数而被 L 作用后所得结果。

【证】 按带余项的 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!}$$
$$+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \qquad (1.28)$$

因为

$$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt。$$

又根据 $L(p)=0$, $p\in H_n$, 若以 L 作用于(1.28)的等式两边, 可得到

$$L(f)=\frac{1}{n!}L\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt。$$

按定理假设条件, 上述积分可以换序而成为

$$L(f)=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)L_x[(x-t)_+^n]dt。$$

定理证毕。

函数 $K(t)=\frac{1}{n!}L_x[(x-t)_+^n]$ 称为泛函 L 的 Peano 核。

推论 3 在定理 7 的假设外, 若核 $K(t)$ 于 $[a, b]$ 不变号, 则对一切 $f(x)\in C^{n+1}[a, b]$, 均有

$$L(f)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}L(x^{n+1}) \quad (a<\xi<b)。 \qquad (1.29)$$

事实上, 对(1.27)右端应用第一积分中值定理, 则有

$$L(f)=f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b K(t)dt \quad (a<\xi<b)。 \qquad (1.30)$$

特别地, 若于上式中取 $f(x)=x^{n+1}$, 可知

$$L(x^{n+1})=(n+1)!\int_a^b K(t)dt。$$

将之代入(1.30)即得(1.29)。

下面讨论样条函数的插值问题：给定点列

$$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{N+n+1}, \tag{1.31}$$

试问对于任意给定的一组实数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$，是否存在唯一的一个 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，使得

$$S(\xi_j)=y_j \quad (j=1, 2, \cdots, N+n+1)。 \tag{1.32}$$

定理 8 对于 $k>0$，行列式

$$|(\xi_i-x_j)_+^k|=\begin{vmatrix}(\xi_1-x_1)_+^k & (\xi_1-x_2)_+^k & \cdots & (\xi_1-x_m)_+^k\\ (\xi_2-x_1)_+^k & (\xi_2-x_2)_+^k & \cdots & (\xi_2-x_m)_+^k\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\xi_m-x_1)_+^k & (\xi_m-x_2)_+^k & \cdots & (\xi_m-x_m)_+^k\end{vmatrix}>0, \tag{1.33}$$

必须且只须下述不等式均满足：

$$\xi_{i-k-1}<x_i<\xi_i \quad (i=1, 2, \cdots, N)。 \tag{1.34}$$

【证】 对 k 进行归纳。当 $k=0$ 时，按截断多项式的定义和行列式的运算规律即可知(1.33)与(1.34)的等价性。

今假定定理 8 对行列式 $|(\xi_i-x_j)_+^{k-1}|$ 已经建立，而往证对 $|(\xi_i-x_j)_+^k|$ 也成立。这须用到恒等式(本章习题 3)

$$|(\xi_i-x_j)_+^k|$$

$$=\int\cdots\int_{0<t_1<t_2<\cdots<t_N<1}|(\xi_i-t_p)_+^0||(t_q-x_j)_+^{k-1}|dt_1\cdots dt_N。 \tag{1.35}$$

显然为使 $|(\xi_i-x_j)_+^k|$ 为正的，当且仅当于具正测度的 $\{t_r\}$ 空间区域内 $|(\xi_i-t_p)_+^0|$，$|(t_q-x_j)_+^{k-1}|$ 同取正值时才可能。而由归纳法假定，为使这两行列式是正的，仅当下式成立：

$$\xi_{j-1}<t_j<\xi_j \quad (j=1, 2, \cdots, N),$$

$$t_{j-n}<x_j<t_j \quad (j=1, 2, \cdots, N),$$

即 $$\xi_{j-n-1}<x_j<\xi_j \quad (j=1, 2, \cdots, N)。$$

由归纳法即知定理 8 成立。

定理 8 是一条十分有用的定理。利用它，就不难解决一般样条函数的插值问题(1.32)了。

定理 9 对任意给定的 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$，插值问题(1.32)均有解，必须且只须

$$\xi_i<x_i<\xi_{i+n+1} \quad (i=1, \cdots, N)。 \tag{1.36}$$

并且在这种情况下(1.32)的解还是唯一的。

由定理 8 并注意在区间 $[\xi_1, \xi_{n+N+1}]$ 内，$S(x)$ 可表示为

$$\sum_{j=1}^{n+N+1} \alpha_j (x-\zeta_j)_+^n,$$

此处 $\zeta_1<\zeta_2<\cdots<\zeta_{n+1}<\xi_1$ 且 $\zeta_{n+j+1}=x_j$。因为插值问题(1.32)是一个线代数方程组，它对任意 $\{y_j\}$ 都有唯一解，必须且只须其相应系数行列式不等于 0。于是由定理 8 可知，为使对任意给定的一组 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$，插值问题(1.32)均有解，必须且只须(1.34)形不等式成立。再由 $\zeta_{n+j+1}=x_j$ 等关系式，可知此时必须且只须(1.36)成立。定理 9 得证。

定理 9 从理论上完全解决了 n 次样条函数的插值问题解的存在性与唯一性问题。无论在理论或实际应用上，它都有重要的指导意义。

推论 4 给定插值结点

$$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m,$$

考虑具有 N 个样条结点的 $n=m-N-1$ 次样条函数，其 N 个样条结点取自 $\xi_2, \cdots, \xi_{m-1}$ 之内。则对任何一组 $y_1, \cdots, y_m$，插值问题(1.32)皆有唯一解。

事实上，在上述推论的前提假设下，条件(1.36)是自然满足的。

§2. B 样条及其性质

设

$$\cdots<x_{-2}<x_{-1}<x_0<x_1<\cdots<x_\nu<\cdots, \tag{2.1}$$

$x_\nu\to\pm\infty(\nu\to\pm\infty)$，$n$ 为自然数。

定义

$$M_n(x; y)=n(y-x)_+^{n-1}。 \tag{2.2}$$

视其中 x 为参数，把 $M_n(x; y)$ 作为 y 的函数，考虑其于 $y=x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的 n 阶差商 $M_n(x; x_0, x_1, \cdots, x_n)$：

$$M_n(x)=M_n(x; x_0, x_1, \cdots, x_n)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n(x_\nu-x)_+^{n-1}}{\omega'(x_\nu)}, \tag{2.3}$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$。

显然 $M_n(x)$ 是一个以 $x_0, \cdots, x_n$ 为结点的 $n-1$ 次样条函数。并且按截断多项式的定义，当 $x>x_n$ 时，$M_n(x)\equiv0$；又当 $x<x_0$ 时，(2.3) 式右端中的截断号"+"可以去掉，而使 $M_n(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式的 n 阶差商。于是由差商的性质可知，此时也有 $M_n(x)\equiv0$。总之

$$M_n(x)\equiv0，当 x\in [x_0, x_n]。 \tag{2.4}$$

由 Peano 定理，若 $f(x)\in C^n$，则

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$
$$=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_n}M_n(x; x_0, \cdots, x_n)f^{(n)}(x)dx。 \tag{2.5}$$

特别地，若取 $f(x)=x^n$，则可由上式推知

$$\int_{-\infty}^{\infty}M_n(x; x_0, \cdots, x_n)dx=1。 \tag{2.6}$$

定理 10 $M_n^{(\nu)}(x)(\nu=0, \cdots, n-2)$ 于 (x_0, x_n) 内恰有 ν 个不同的零点。特别地，有

$$M_n(x)>0, \text{ 当 } x\in(x_0, x_n)。$$

【证】 由(2.3)式，知

$$M_n(x)=n(x_n-x)^{n-1}/\omega'(x_n) \quad (x_{n-1}<x<x_n)。$$

因而于区间 (x_{n-1}, x_n) 内，$M_n(x)>0$。从而可以找到三个点 $x_0<x^*<x_n$, 使 $M_n(x)$ 于其上的符号依次为 0, +, 0; 由中值定理，又可找到四个点 $x_0<x_1^*<x_2^*<x_n$, 使 $M_n'(x)$ 于其上的符号依次为 0, +, −, 0 (变号一次); ……最后，我们可以找到 $n+1$ 个点 $x_0<\bar{x}_1<\bar{x}_2<\cdots<\bar{x}_{n-1}<x_n$, 使 $M_n^{(n-2)}(x)$ 于其上的符号依次为 0, +, −, +, −, …, 0 (变号 $n-2$ 次)。另一方面，由(2.3)式，

$$M_n^{(n-2)}(x)=(-1)^{n-2}n!\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(x_\nu-x)_+}{\omega'(x_\nu)}$$

是一条以 $x=x_0, \cdots, x_n$ 为顶点横坐标的折线。该折线在两端点处 $y=0$。而且 $M_n^{(n-2)}(x_\nu)(\nu=1, \cdots, n-1)$ 不等于 0 且交错变号。从而 $M_n^{(n-2)}(x)$ 恰好于 (x_0, x_n) 内有 $n-2$ 个单根。

因为 $M_n^{(\nu)}(x)$ 于 (x_0, x_n) 内至少有 ν 个互异的根，若它有多于 ν 个根(重数计算在内)，则按 Rolle 定理可知 $M_n^{(n-2)}(x)$ 的根多于 $n-2$ 个(包括重数)。但这是不可能的，定理证毕。

由(2.3)给出的 $M_n(x)$ 称为 B 样条函数。

对于等距结点情况，Schoenberg(1946)还给出了 B 样条的差分表达式。对于以 1 为步长的等距结点错况，他给出

$$\begin{aligned} M_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sin u/2}{u}\right)^n e^{iux}\,du \\ &=\frac{1}{(n-1)!}\,\delta^n x_+^n, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 δ^n 表示 n 阶中心差分。

$M_n(x)$ 的显表达式为

$(n-1)!M_n(x)$

$$
=\begin{cases}
0, & 若\ x\leqslant -n/2,\\
\left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}, & 若\ -\frac{n}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{n}{2}+1,\\
\left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\binom{n}{1}\left(x+\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}, & \\
\qquad 若\ -\frac{n}{2}+1\leqslant x\leqslant -\frac{n}{2}+2, & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\binom{n}{1}\left(x+\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}+\cdots & \\
\quad +(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\left(x-\frac{n}{2}+1\right)^{n-1}, & \\
\qquad 若\ \frac{n}{2}-1\leqslant x\leqslant \frac{n}{2}, & \\
\delta^n x^{n-1}=0, & 若\ \frac{n}{2}\leqslant x。
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

特别地,

$$
M_1(x)=\begin{cases}
0, & 当\ x<-1/2,\\
1, & 当\ -1/2<x<1/2,\\
0, & 当\ 1/2<x,
\end{cases}
$$

此处还须加上 $M_1(\pm 1/2)=1/2$ 的要求。

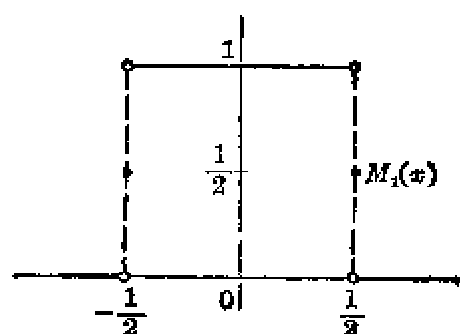
$$
M_2(x)=\begin{cases}
0, & 当\ x\leqslant -1,\\
x+1, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\
-x+1, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\
0, & 当\ 1\leqslant x。
\end{cases}
$$

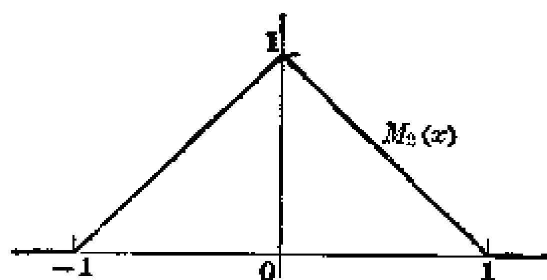
$M_3(x)$

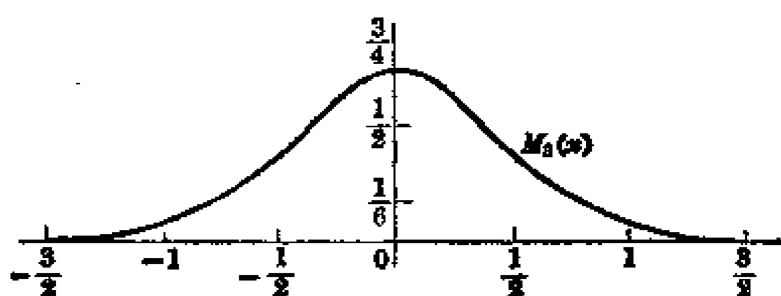
$$
=\begin{cases}
0, & \text{当 } x\leqslant -3/2, \\
\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2, & \text{当 } -3/2\leqslant x\leqslant -1/2, \\
\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2, & \text{当 } -1/2\leqslant x\leqslant 1/2, \\
\frac{1}{2}\left(-x+\frac{3}{2}\right)^2, & \text{当 } 1/2\leqslant x\leqslant 3/2, \\
0, & \text{当 } 3/2\leqslant x。
\end{cases}
$$

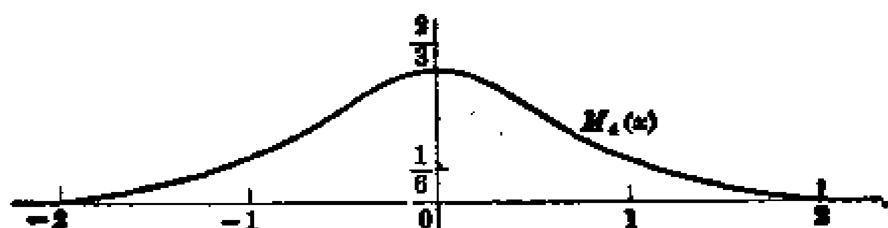
$$
M_4(x)=\begin{cases}
0, & \text{当 } x\leqslant -2, \\
\frac{1}{6}(x+2)^3, & \text{当 } -2\leqslant x\leqslant -1, \\
\frac{1}{6}(x+2)^3-\frac{4}{6}(x+1)^3, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0, \\
\frac{1}{6}(-x+2)^3-\frac{4}{6}(-x+1)^3, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, \\
\frac{1}{6}(-x+2)^3, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 2, \\
0, & \text{当 } 2\leqslant x。
\end{cases}
$$

它们的图形如下：









下面来讨论 $n-1$ 次样条函数类 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的基函数问题。由定理1，$\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 有下述一组基函数：

$$1,\ x,\ \cdots,\ x^{n-1},\ (x-x_1)_+^{n-1},\ \cdots,\ (x-x_N)_+^{n-1}, \tag{2.9}$$

它们是由 $N+n$ 个函数组成的。

由于实际计算问题的需要，下面来指出 B 样条的一个十分重要性质，即它们构成了 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的更为方便的基底。

引理 设

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_r, \quad 其中\ 1 \leqslant r \leqslant n,$$

则 $M_n(x; x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 于区间 $(-\infty, x_1)$ 中为一最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式；$(-1)^{r-1}M_n(x_1, x_2, \cdots, x_r; x)$ 于区间 (x_r, ∞) 中为一个最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式，并且

$$\begin{aligned} &M_n(x; x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0 \quad (x \geqslant x_r), \\ &(-1)^{r-1}M_n(x_1, x_2, \cdots, x_r; x) = 0 \quad (x \leqslant x_1)。\end{aligned} \tag{2.10}$$

【证】 按 $M_n(x;\ y)$ 定义和差商公式，

$$M_n(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r)=n\sum_{i=1}^{r}\frac{(x_i-x)_+^{n-1}}{\omega_r'(x_i)},\qquad(2.11)$$

其中 $\omega_r(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)$。

由截断多项式定义，当 $x\geqslant x_r$ 时 (2.10) 中的第一式成立。而当 $x\leqslant x_1$ 时，(2.11) 中的截断号"+"可以去掉，因而此时 $M_n(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r)$ 实为 x 的一个多项式，其中 x^{n-j-1} 的系数是

$$n(-1)^{n-j-1}\binom{n-1}{j}\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^j}{\omega_r'(x_i)}。$$

不难发现 $\sum\limits_{i=1}^{r}x_i^j/\omega_r'(x_i)$ 恰为 x^j 的 $r-1$ 阶差商。从而当 $j=0,\ 1,\ \cdots,\ r-2$ 时，它们皆为 0。但当 $j=r-1$ 时，它不为 0。所以当 $x\leqslant x_1$ 时，$M_n(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r)$ 是一最高次项系数不为 0 的 $n-r$ 次多项式。

同样，只须注意到

$$(-1)^rM_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r;\ x)=n(-1)^{r-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{(x-x_i)_+^{n-1}}{\omega_r'(x_i)},$$

则可推知引理的其它结论成立。证毕。

定理 11 设 $n\leqslant N$，且

$$x_1<x_2<\cdots<x_N。$$

下述 $N+n$ 个样条函数构成 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$ 的一组基函数：

$$\begin{aligned}&B_i(x)=M_n(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i)\quad(i=1,\ \cdots,\ n);\\&B_{n+i}(x)=M_n(x;\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+n})\quad(i=1,\ \cdots,\ N-n);\\&B_{N+i}(x)=(-1)^{n-i}M_n(x_{N-n+i},\ x_{N-n+i+1},\ \cdots,\ x_N;\ x)\\&\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)。\end{aligned}\qquad(2.12)$$

【证】 因为 $n-1$ 次样条函数类 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 中任意两个样条函数的随意线性组合都仍然属于 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，所以它是一个线性空间。由于 $(x-x_i)_+^{n-1}$ 和 $(x_i-x)_+^{n-1}(i=1, \cdots, N)$ 都含于 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 中，所以由(2.12)所示的 $N+n$ 个函数 $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\cdots$, $B_{N+n}(x)$ 也都是类 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 中的函数，因为它们均由 $\{(x-x_i)_+^{n-1}\}$ 以及 $\{(x_i-x)_+^{n-1}\}$ 组合而成。

定理1已指明 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 是 $N+n$ 维的线性空间。因此，为证定理11，只须证明由(2.12)所示的 $N+n$ 个函数 $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\cdots$, $B_{N+n}(x)$ 线性无关就够了。

设有常数 c_1, c_2, $\cdots$, c_{N+n}，使

$$\begin{aligned}c_1B_1(x)+\cdots+c_nB_n(x)+c_{n+1}B_{n+1}(x)+\cdots\\+c_NB_N(x)+c_{N+1}B_{N+1}(x)+\cdots+c_{N+n}B_{N+n}(x)\\\equiv 0\quad(-\infty<x<\infty)\end{aligned}\tag{2.13}$$

成立。往证

$$c_1=c_2=\cdots=c_{N+n}=0。\tag{2.14}$$

按(2.4)，(2.10)和(2.12)，于 $(-\infty, x_1)$ 上考虑(2.13)式可知

$$c_1B_1(x)+c_2B_2(x)+\cdots+c_nB_n(x)\equiv 0\quad(-\infty<x<x_1)。\tag{2.15}$$

由引理，$B_1(x)$, $B_2(x)$, $\cdots$, $B_n(x)$ 分别为最高次项系数不为0的 $n-1$ 次，$n-2$ 次，$\cdots$，0次多项式。因此由代数基本定理，可推知

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0。\tag{2.16}$$

同理，由(2.4)，(2.10)，(2.12)和(2.13)，可知

$$c_{N+1}B_{N+1}(x)+c_{N+2}B_{N+2}(x)+\cdots+c_{N+n}B_{N+n}(x)\equiv 0$$
$$(x_N<x<\infty)。$$

再根据引理以及代数基本定理，也有

$$c_{N+1}=c_{N+2}=\cdots=c_{N+n}=0。\tag{2.17}$$

综合(2.13)，(2.16)和(2.17)，得到

$$c_{n+1}B_{n+1}(x)+\cdots+c_NB_N(x)=0\quad(-\infty<x<\infty)。\tag{2.18}$$

又由(2.4)式可知 $B_{n+i}(x)$ 的跨度(即取非零值的区间长度)有限，所以当 $x_{N-1}<x<x_N$ 时(2.18)式成为

$$c_NB_N(x)=0\quad(x_{N-1}<x<x_N)。\tag{2.19}$$

根据定义

$$B_N(x)=M_n(x;\ x_{N-n},\ \cdots,\ x_N)=n\sum_{i=N-n}^{N}\frac{(x_i-x)_+^{n-1}}{\omega'(x_i)}$$

$$=n\frac{(x_N-x)^{n-1}}{\omega'(x_N)}\quad(x_{N-1}<x<x_N),$$

其中 $\omega(x)=(x-x_{N-n})\cdots(x-x_N)$。特别地，

$$B_N\left(\frac{x_{N-1}+x_N}{2}\right)=n\frac{(x_N-x_{N-1})^{n-1}}{2^{n-1}\omega'(x_N)}\neq0。$$

于是由(2.19)可推知

$$c_N=0。$$

这样一来，(2.18)简化为

$$c_{n+1}B_{n+1}(x)+\cdots+c_{N-1}B_{N-1}(x)=0\quad(-\infty<x<\infty)。\tag{2.20}$$

与前面完全相同地，考虑 $(x_{N-2},\ x_{N-1})$ 区间上的(2.20)式，则可推知 $c_{N-1}=0$。依此类推，即可最后得到

$$c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_N=0。\tag{2.21}$$

综合(2.16)，(2.17)和(2.21)可知 $B_1(x),B_2(x),\cdots,B_{N+n}(x)$ 线性无关。

于是由线性空间理论，$B_1(x)$，$B_2(x)$，$\cdots$，$B_{N+n}(x)$ 构成空间 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_N)$的一组基底。定理证毕。

推论 5 设 $n<N$，且

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N,$$

则 B 样条函数

$$B_j(x) = M_n(x;\ x_j,\ x_{j+1},\ \cdots,\ x_{j+n}) \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-n)$$

线性无关。于是满足

$$S(x)=0,\ \text{只要}\ x \overline{\in} (x_1,\ x_N)$$

的任一 $S(x) \in \mathscr{S}_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$，均可唯一地表现为

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N-n} c_j B_j(x)。 \tag{2.22}$$

对于自然样条函数类 $\mathfrak{N}_{2k-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$，我们也可以引进新的基函数组。设

$$M(x;\ y) = 2k(y-x)_+^{2k-1}.$$

与定理 11 完全类似地，有

定理 12 设 $N \geqslant 2k$，且 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$。则下述 N 个自然样条函数构成自然样条函数类 $\mathfrak{N}_{2k-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$ 的一组基函数：

$$B_i(x) = M(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k+i}) \quad (i=1,\ \cdots,\ k),$$

$$B_{k+i}(x) = M(x;\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+2k}) \quad (i=1,\ \cdots,\ N-2k),$$

$$B_{N-k+i}(x) = (-1)^i M(x_{N-2k+i},\ \cdots,\ x_N;\ x) \quad (i=1,\ \cdots,\ k)。 \tag{2.23}$$

定理 13 若 $k \leqslant N < 2k$，$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ 且多项式 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$\cdots$，$p_{2k-N}(x)$ 是 $2k-N-1$ 次多项式类的一组基底。则下述 N 个自然样条函数构成 $\mathfrak{N}_{2k-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$ 的一组基函数：

$$B_i(x) = M(x;\ x_1,\ \cdots,\ x_{k+i}) \quad (i=1,\ \cdots,\ N-k),$$

$$B_{N-k+i}(x) = p_i(x) \quad (i=1,\ \cdots,\ 2k-N), \tag{2.24}$$

$$B_{k+i}(x) = (-1)^{N-i} M(x_i,\ \cdots,\ x_N;\ x) \quad (i=1,\ \cdots,\ N-k)。$$

定理 12 与定理 13 请读者自行证明，此处不拟开列出。

定理 9 指出了样条函数插值问题(1.32)解存在并且唯一的充分必要条件：插值结点(1.31)与样条结点 $x_1<x_2<\cdots<x_N$ 之间，必须满足位置分配关系(1.36)，即

$$\xi_i<x_i<\xi_{i+n+1} \quad (i=1,\ \cdots,\ N)。 \tag{2.25}$$

然而当(2.25)满足时，为了求得满足插值条件(1.32)的样条函数 $S(x)$，必须求解下述线代数方程组

$$S(\xi_j)=\sum_{i=0}^{n} a_i\xi_j^i+\sum_{i=1}^{N} c_i(\xi_j-x_i)_+^n$$

$$=y_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N+n+1)。 \tag{2.26}$$

容易看出该线性方程组的系数矩阵不是稀疏矩阵。方程组(2.26)有时甚至是病态的。

为了避免出现以上不理想情况，我们经常采用 B 样条作为 $\mathscr{S}_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$ 的基底，转而来求解一个新的线性方程组

$$\sum_j c_jB_j(x_i)=y_i \quad (i=1,\ \cdots,\ N+n+1)。 \tag{2.27}$$

由于 $B_j(x)$ 的支集的有限性，此时系数矩阵就不会出现以上情况了。

关于这一方面的进一步讨论，读者可参考 L. L. Schumaker 发表在 T. N. E. Greville 所编文集 "Theory and Applications of Spline Functions"，87～102 页上的文章。

§3. Hermite 插值公式

为了下面讨论以及今后应用上的需要，本节将介绍一种具有重(复)结点的多项式插值方法，即 Hermite 插值方法。

设

$$x_1<x_2<\cdots<x_s, \tag{3.1}$$

$y_k^{(h)}$ $(h=0,\ 1,\ \cdots,\ \alpha_k-1;\ k=1,\ \cdots,\ s)$ 为事先指定的实数值，

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 为正整数;

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n+1,\ \alpha_k\geqslant 1\quad (k=1,\ \cdots,\ s)。\tag{3.2}$$

今欲构造一个 n 次多项式 $P(x)\in H_n$, 使之满足插值条件

$$P^{(h)}(x_k)=y_k^{(h)}\quad (h=0,\ \cdots,\ \alpha_k-1;\ k=1,\ \cdots,\ s)。\tag{3.3}$$

为解决插值问题(3.3),最直接的办法是采用待定系数法或者求解由(3.3)所确定的线性方程组。

此处我们拟采用 Lagrange 插值中构造基本多项式的类似办法来解决 Hermite 插值问题 (3.3): 构造一批 n 次多项式

$$L_{ik}(x)\quad (i=1,\ \cdots,\ s;\ k=0,\ \cdots,\ \alpha_i-1)$$

使之满足

$$L_{ik}^{(h)}(x_m)=0\quad (m\neq i;\ h=0,\ \cdots,\ \alpha_m-1)\tag{3.4}$$

和

$$L_{ik}^{(h)}(x_i)=\begin{cases}0,\ 当\ h\neq k\\ 1,\ 当\ h=k\end{cases}\quad (h=0,\ \cdots,\ \alpha_i-1)。\tag{3.5}$$

只要上述问题一解决,则 n 次多项式

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{h=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(h)}L_{ih}(x)\tag{3.6}$$

就必满足插值条件(3.3)。

以下集中来构造 $L_{ik}(x)$。由(3.4)和(3.5)可知

$$L_{ik}(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x-x_i)^k$$
$$\cdot(x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}l_{ik}(x),$$

其中 $l_{ik}(x)\in H_{\alpha_i-k-1}$ 是某 α_i-k-1 次多项式。若令

$$\omega(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s},$$

则上式可缩写为

$$L_{ik}(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-k}}l_{ik}(x)。\tag{3.7}$$

为确定$l_{ik}(x)$还须利用条件(3.5)，而得

$$L_{ik}(x)=\frac{(x-x_i)^k}{k!}[1+\sigma(x-x_i)^{\alpha_i-k}+\cdots]。\quad (3.8)$$

比较(3.7)与(3.8)，有

$$l_{ik}(x)=\frac{1}{k!}\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}+\sigma'(x-x_i)^{\alpha_i-k}+\cdots,$$

因为 $l_{ik}(x)\in H_{\alpha_i-k-1}$，所以它必定是函数 $\frac{1}{k!}\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}$ 于 $x=x_i$ 处 Taylor 展开的前 α_i-k 项和。若把这 α_i-k 项和记为

$$l_{ik}(x)=\frac{1}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)},$$

则由(3.7)式，应有

$$L_{ik}(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}。$$

从而

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}y_i^{(k)}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\times\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}\right]。\quad (3.9)$$

若于(3.3)中取 $y_k^{(h)}=f^{(h)}(x_k)\ (h=0,\cdots,\alpha_k-1;\ k=1,\cdots,s)$，则相应 Hermite 插值多项式为

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}f^{(k)}(x_i)\frac{(x-x_i)^k}{k!}\times\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)}\right]。\quad (3.10)$$

例1 设 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_s=1$。则插值问题(3.3)就是通常多项式插值问题。此时，按定义有

$$\left\{\frac{(x-x_i)}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(0)}=\frac{1}{\omega'(x_i)},$$

其中 $$\omega(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_s)。$$

相应于(3.10)的 Hermite 插值多项式恰为一般 Lagrange 插值多项式

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}f(x_i)\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}。$$

例 2 设仅有一个 α 重的结点 $x=a$。则 $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}$，而相应 Hermite 插值多项式恰为 $f(x)$ 于 $x=a$ 点附近 Taylor 展开式的部分和

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}。$$

例 3 设 $\alpha_1=\cdots=\alpha_s=2$。则与(3.3)相应的 Hermite 插值问题为求 $n=2s-1$ 次多项式 $P(x)$，使之满足

$$\begin{aligned}P(x_i)&=f(x_i),\\ P'(x_i)&=f'(x_i),\end{aligned}\quad (i=1,\ \cdots,\ s)。\qquad (3.11)$$

这个特定的 Hermite 插值问题的几何意义在于使插值多项式不仅通过给定的型值点 $(x_i,\ f(x_i))\ (i=1,\ \cdots,\ s)$，而且在 $x=x_i\ (i=1,\ \cdots,\ s)$ 处与曲线 $y=f(x)$ 有相同的切线。

为推导相应 Hermite 插值公式，记

$$\sigma(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_s),$$

则 $$\omega(x)=[\sigma(x)]^2,$$

$$\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}=\left[\frac{x-x_i}{\sigma(x)}\right]^2。$$

又因为 $$\frac{x-x_i}{\sigma(x)}=\frac{1}{\sigma'(x_i)}-\frac{1}{2}\frac{\sigma''(x_i)}{[\sigma'(x_i)]^2}(x-x_i)+\cdots,$$

$$\left[\frac{x-x_i}{\sigma(x)}\right]^2=\frac{1}{[\sigma'(x_i)]^2}-\frac{\sigma''(x_i)}{[\sigma'(x_i)]^3}(x-x_i)+\cdots,$$

故由(3.10)式，有

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\sigma(x)}{\sigma'(x_i)(x-x_i)}\right)^2$$
$$\times\left[f(x_i)\left(1-\frac{\sigma''(x_i)}{\sigma'(x_i)}(x-x_i)\right)+f'(x_i)(x-x_i)\right]。\tag{3.12}$$

更特殊地，当 $s=2$，且 $\alpha_1=\alpha_2=2$ 时，相应插值公式为下述 3 次多项式

$$\begin{aligned}P(x)=&f(x_1)\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\\&+f'(x_1)(x-x_1)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\\&+f(x_2)\left(1-2\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2\\&+f'(x_2)(x-x_2)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2。\end{aligned}\tag{3.13}$$

这是一个非常重要的 Hermite 插值多项式。它所刻划的曲线 $y=P(x)$ 是这样一条曲线：其在区间 $[x_1, x_2]$ 两个端点处不仅通过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$，而且与 $y=f(x)$ 有相同的切线。

Hermite 插值公式 (3.12) 的误差估计请读者自行给出（见习题 7）。

§4. 三次样条插值的计算方法

三次样条函数插值问题，除了可以采用 B 样条作基底而直接求解外，还可以直接用下述方法来求解。

设给定一区间 $[a, b]$，且

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b。$$

任意给定一组 $y_0, y_1, \cdots, y_N$，要求构造一个

$$S(x)\in\mathscr{S}_3(x_0, x_1, \cdots, x_N),$$

使得

$$S(x_j)=y_j \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)。 \tag{4.1}$$

今以 M_j 表示 $S''(x_j)$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$。由于 $S(x)$ 为分段 3 次多项式，所以 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1},\ x_j]$ 上为一线性函数。因而它可由过 $(x_{j-1},\ M_{j-1})$ 与 $(x_j,\ M_j)$ 两点的线性插值函数

$$S''(x)=M_{j-1}\frac{x_j-x}{h_j}+M_j\frac{x-x_{j-1}}{h_j} \quad (x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j) \tag{4.2}$$

所决定，其中 $h_j=x_j-x_{j-1}$。

为了最后求出 $S(x)$ 在 $[x_{j-1},\ x_j]$ 上的表达式，只须对 (4.2) 式积分两次，并定出积分常数就够了。

当 $x\in[x_{j-1},\ x_j]$ 时

$$S(x)=M_{j-1}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+M_j\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}, \tag{4.3}$$

$$S'(x)=-M_{j-1}\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}+M_j\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_j。 \tag{4.4}$$

由 (4.3) 可知，为求 $S(x)$，关键是设法确定各个 $M_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$。而为了求得各个 $M_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$，必须引用样条结点处的光滑连接条件

$$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)。 \tag{4.5}$$

按 (4.4)，有

$$S'(x_j-0)=\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j},$$

$$S'(x_j+0)=-\frac{h_{j+1}}{3}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}。$$

由(4.5)可得连续性方程

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}$$

$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\quad (j=1,\ \cdots,\ N-1)。\tag{4.6}$$

它给出了 $N+1$ 个未知数 $M_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ 的 $N-1$ 个方程式，按它尚不足以唯一确定 $M_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$。尚须补充两个"边界条件"，这有下述几种情形：

（1）假定 $S'(a)=y'_0$，$S'(b)=y'_N$。于是按前面公式，可得方程

$$\begin{aligned}2M_0+M_1&=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y'_0\right),\\ M_{N-1}+2M_N&=\frac{6}{h_N}\left(y'_N-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right)。\end{aligned}\tag{4.7}$$

（2）假定 $M_0=0$，$M_N=0$，这相当于自然样条函数的条件。

无论（1）或（2），均可概括为

$$\begin{cases}2M_0+\lambda_0M_1=d_0,\\ \mu_NM_{N-1}+2M_N=d_N。\end{cases}\tag{4.8}$$

引入记号

$$\lambda_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}},\ \mu_j=1-\lambda_j\quad (j=1,\ \cdots,\ N-1),\tag{4.9}$$

则(4.6)可以改写为

$$\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}$$
$$=6\cdot\frac{[(y_{j+1}-y_j)/h_{j+1}]-[(y_j-y_{j-1})/h_j]}{h_j+h_{j+1}} \quad (4.10)$$
$$(j=1,\ \cdots,\ N-1)。$$

所以由(4.8)，(4.10)确定的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \mathbf{0} & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{N-2} & 2 & \lambda_{N-2} & \\ & \mathbf{0} & & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & & & & \mu_N & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

其中 $d_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$表示(4.11)的右端项。

一个 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_N)$ 如果满足条件

$$S^{(j)}(a+0)=S^{(j)}(b-0) \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,n-1), \quad (4.12)$$

则称之为以 $b-a$ 为周期的 n 次周期样条函数。显然，对以 $b-a$ 为周期的 3 次周期样条函数来说，应该要求 (4.10) 对 $j=N$ 的情况也成立。如果再注意到这时的 $M_0=M_N$ 性质，而把(4.10)中的 M_0 换成 M_N，则相应于 3 次周期样条函数的方程组为

$$
\begin{pmatrix}
2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\
\mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\
0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\
\lambda_N & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}
\tag{4.13}
$$

其中 $\quad M_0=M_N,\quad \lambda_N=\frac{h_1}{h_N+h_1},\quad \mu_N=1-\lambda_N$。

线代数方程组(4.11)常可采用追赶法来求解。而方程组(4.13)则可把 M_N 先作为参量，求解其中前 $N-1$ 个方程中的 $N-1$ 个未知数 $M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}$(其解依赖于 M_N)，然后代入最后一个方程以求出 M_N, 同时 $M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}$ 也随之确定了。

为使读者使用方便，下面简要介绍有关具体计算程序。

(4.11)是一个以三对角矩阵为系数矩阵的线性代数方程组。其一般形式为

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}
\tag{4.14}
$$

其计算程序为先形成 $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$:

$$\begin{cases} p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0), \\ q_k = -c_k / p_k, \\ u_k = (d_k - a_k u_{k-1}) / p_k \quad (u_0 = 0), \end{cases} \quad k = 1, \cdots, n, \quad (4.15)$$

然后按下述关系式逐一推算各 x_i 的值：

$$\begin{cases} x_k = q_k x_{k+1} + u_k \quad (k = 1, \cdots, n-1), \\ x_n = u_n。 \end{cases} \quad (4.16)$$

方程组(4.13)的一般形式为

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}。 \quad (4.17)$$

其计算程序为先按(4.15)计算出 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$。再按下述公式算出 $\{t_k\}$ 和 $\{v_k\}$：

$$\begin{cases} s_k = -a_k s_{k-1} / p_k \quad (s_0 = 1), \\ t_k = q_k t_{k+1} + s_k \quad (t_n = 1), \\ v_k = q_k v_{k+1} + u_k \quad (v_n = 0)。 \end{cases} \quad (4.18)$$

接着从方程

$$c_n (t_1 x_n + v_1) + a_n (t_{n-1} x_n + v_{n-1}) + b_n x_n = d_n \quad (4.19)$$

中解出 x_n。最后由递推关系式

$$x_k = t_k x_n + v_k \quad (k = 1, \cdots, n-1) \quad (4.20)$$

逐个求得 $x_{n-1}, \cdots, x_1$。

应该指出，此处在推导 3 次样条插值时，乃是从其 2 阶导数为线性函数这一点出发的。当然，我们也可以从特殊形式的 Hermite 插值公式(3.13)出发来建立 3 次样条插值的一类新的计算方案。这一工作留给读者作为习题去完成。

下面介绍等距结点的3次自然样条函数 $S(x)\in \mathfrak{N}_3(x_1, \cdots, x_N)$的一种计算表格。此时

$$x_j=x_1+(j-1)h,\ h=x_2-x_1 \quad (j=1, \cdots, N)。$$

而于区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $S(x)$的表达式为

$$S(x)=\left(y_i-\frac{h^2}{6}M_i\right)\frac{x_{i+1}-x}{h}+\left(y_{i+1}-\frac{h^2}{6}M_{i+1}\right)\frac{x-x_i}{h}$$
$$+\frac{h^2}{6}M_i\left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^3+\frac{h^2}{6}M_{i+1}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3。\tag{4.21}$$

相应连续性方程为

$$\frac{h^2}{6}M_{j+1}+4\frac{h^2}{6}M_j+\frac{h^2}{6}M_{j-1}=\delta^2 y_i$$
$$(j=2, \cdots, N-1),\tag{4.22}$$

其中 $\delta^2 y_i$ 为2阶中心差分 $\delta^2 y_i=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}$。而3阶自然样条函数的边界条件为

$$M_1=M_N=0。\tag{4.23}$$

(4.22)所示线代数方程组为

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & & \\ 1 & 4 & 1 & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{h^2}{6}M_2 \\ \frac{h^2}{6}M_3 \\ \vdots \\ \frac{h^2}{6}M_{N-2} \\ \frac{h^2}{6}M_{N-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta^2 y_2 \\ \delta^2 y_3 \\ \vdots \\ \delta^2 y_{N-2} \\ \delta^2 y_{N-1} \end{pmatrix}。\tag{4.24}$$

今将(4.24)最后一行的 $-1/4$ 倍加到倒数第二行，使倒数第二行的主对角线上方的元素为0。再从这个新的倒数第二行出发，把倒数第三行主对角线上方的元素变为0。一直这样

作下去，即可将(4.24)变形为

$$\begin{pmatrix} \alpha_{N-3} & 0 & & & \\ 1 & \alpha_{N-4} & \ddots & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_1 & 0 \\ \mathbf{0} & & & 1 & \alpha_0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

其中 $$M=\frac{h^2}{6}(M_2,\ M_3,\ \cdots,\ M_{N-2},\ M_{N-1})^T,$$

$$\begin{aligned} &\alpha_j=4-1/\alpha_{j-1} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots), \qquad \alpha_0=4, \\ &d_{j-1}=\delta^2 y_{j-1}-d_j/\alpha_{N-j-1} \quad (j=N-1,\ N-2,\ \cdots,\ 3), \\ &d_{N-1}=\delta^2 y_{N-1}。 \end{aligned} \tag{4.26}$$

若定义

$$\alpha_j=a_j/b_j, \tag{4.27}$$

则由(4.26)可推出递推关系式

$$a_{j+2}=4a_{j+1}-a_j \quad (j\geqslant -1,\ a_0=4,\ a_{-1}=1),$$

$$b_{j+1}=a_j。$$

于是(4.27)又可以改写为

$$\alpha_j=a_j/a_{j-1} \quad (j\geqslant 0)。 \tag{4.28}$$

又由(4.26)可推知

$$d_2=\delta^2 y_2+\sum_{r=3}^{N-1}(-1)^r\left(\frac{a_{N-r-2}}{a_{N-4}}\right)\delta^2 y_r,$$

即 $$a_{N-4}d_2=\sum_{r=2}^{N-1}(-1)^r a_{N-r-2}\delta^2 y_r。$$

以之代入(4.25)的第一个等式，并注意(4.28)即可得到

$$a_{N-3}\left(\frac{h^2}{6}M_2\right)=\sum_{r=2}^{N-1}(-1)^r a_{N-r-2}\delta^2 y_r。 \tag{4.29}$$

由它算出 M_2，然后由连续性方程 (4.22) 和边界条件 (4.23)

即可计算出其它各 $M_j(j=3,\ 4,\ \cdots,\ N-1)$。因为 $\frac{h^2}{6}M_j$ 出现在(4.21)中，若把它直接作为未知数就可以减少舍入误差并节省计算机的存贮量。

前若干个 a_j 的值可列表如下：

j	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_j	1	4	15	56	209	780	2911	10864

j	7	8	9	10	11	12
a_j	40545	151316	564719	2107560	7865521	29354524

j	13	14	15	16	17
a_j	109552575	408855776	1525870529	5694626340	21252634831

例 给定型值点

x	1	2	3, 4	5	6	7	8	9	10
y	244.0	221.0	208.0	211.5	216.0	219.0	221.0	221.5	220.0

采用上述方法($h=1$)，可求出

$$\frac{a_7}{6}M_2=40545\left(\frac{1}{6}M_2\right)=73245。$$

其它 $\frac{a_7}{6}M_3,\ \cdots,\ \frac{a_7}{6}M_9$ 等则可按递推关系

$$\frac{a_7}{6}M_{j+1}=a_7\delta^2y_j-4\left(\frac{a_7}{6}M_j\right)-\left(\frac{a_7}{6}M_{j-1}\right)\quad(j=2,\ \cdots,\ 9)$$

而逐一计算出来。而 $S(x)$ 于各子区间上的表达式也可随之用(4.21)表出。

例如于区间 [1, 2] 上，$S(x)$ 的表达式为

$$S(x)=1.8065112x^3-5.4195336x^2-19.3869776x+76。$$

第六章习题

1. 试证若 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 满足

$$S(x)=0,\ \text{当}\ x\leqslant x_1\ \text{和}\ x\geqslant x_N。$$

则除 $S(x)\equiv 0(-\infty<x<\infty)$ 的情况外，必有

$$N\geqslant n+2。$$

2. 试证

$$|(\xi_i-x_j)_+|>0\quad(i, j=1, 2, \cdots, m)$$

必须且只须
$$\xi_{i-1}<x_i\leqslant\xi_i\quad(i=1, 2, \cdots, m)。$$

3. 证明

$$|(\xi_i-x_j)_+^k|=\int\cdots\int_{0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m\leqslant 1}|(\xi_i-t_q)_+^0||(t_q-x_j)_+^{k-1}|dt_1\cdots dt_m。$$

[提示] 两边完全展开，用 α 与 γ 表示[1, 2, ⋯, m]的排列，则可得

$$\sum_\alpha(-1)^\alpha\prod_{j=1}^m(\xi_j-x_{\alpha(j)})_+^k=\sum_\alpha(-1)^\alpha$$

$$\times\int\cdots\int_{0\leqslant t_1<\cdots<t_m\leqslant 1}\sum_\gamma(-1)^\gamma\prod_{j=1}^m(\xi_j-t_{\gamma(j)})_+^0(t_{\gamma(j)}-x_{\alpha(j)})_+^{k-1}dt_1\cdots dt_m。$$

并注意

$$\int\cdots\int_{0\leqslant t_1<\cdots<t_m\leqslant 1}\sum_\gamma(-1)^\gamma\prod_{j=1}^k(\xi_j-t_{\gamma(j)})_+^0(t_{\gamma(j)}-x_{\alpha(j)})_+^{k-1}dt_1\cdots dt_m$$

$$=\prod_{j=1}^m k\int_0^1(\xi_j-t_j)_+^0(t_j-x_{\alpha(j)})_+^{k-1}dt_j。$$

4. 对于以 1 为步长的等距结点情况，利用(2.7)式证明

$$M_{k+1}(x)=\int_{x-1/2}^{x+1/2}M_k(t)dt,$$

$$M_k^{(\nu)}(x)=\delta^\nu M_{k-\nu}(x)\quad(0\leqslant\nu\leqslant k-1)。$$

5. 证明定理 12。

6. 证明定理 13。

7. 设 $f^{(2s-1)}(x)$ 于 $[a, b]$ 上连续，$f^{(2s)}(x)$ 于 (a, b) 内存在，又设

$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_s\leqslant b。$$

试证由(3.12)所示的 Hermite 插值多项式 $P(x)=P_{2s-1}(x)$ 有如下的误差估计:

$$f(x)-P_{2s-1}(x)=\frac{f^{(2s)}(\xi)}{(2s)!}[\sigma(x)]^2,$$

其中 $x_1<\xi<x_s$。

8．试从特殊形式的 Hermite 插值公式(3.13)出发，推导 3 次样条函数插值的计算方案。

第七章 非线性逼近

考虑函数 $\log(1+x)$ 的逼近问题。它的 Taylor 展开式为

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \quad (-1<x\leqslant 1)。$$

如果记上式右端前 S 项和为 $T_s(x)$，则显然 $T_s(x)$ 可以作为 $\log(1+x)$ 的一种近似。这种逼近误差的分析，完全可以利用 Taylor 公式的余项估计来进行。由连分式展开的方法，$\log(1+x)$ 又有如下的连分式展开式：

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}+\frac{1^2x}{2}+\frac{1^2x}{3}+\frac{2^2x}{4}+\frac{2^2x}{5}+\cdots。$$

经过具体计算不难算出它的前 4 个渐近分式依次为

$$R_1(x)=\frac{2x}{2+x},$$

$$R_2(x)=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2},$$

$$R_3(x)=\frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3},$$

$$R_4(x)=\frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}。$$

可以具体算出，$R_n(x)$ 的展开式将含有函数 $\log(1+x)$ 之 Taylor 展开式的前 $2n$ 项和 $T_{2n}(x)$。下面我们来比较 $R_n(x)$ 与 $T_{2n}(x)$ 的逼近误差。设以 ε_R 与 ε_T 分别记 $R_n(x)$ 与 $T_{2n}(x)$ 同 $\log(1+x)$ 之间的误差，并取 $x=1$。它们误差的对比，如下表：

n	$R_n(1)$	ε_R	$T_{2n}(1)$	ε_T
1	0.667	0.026	0.50	0.19
2	0.69231	0.00084	0.58	0.11
3	0.693122	0.000025	0.617	0.076
4	0.69314642	0.00000076	0.634	0.058

$$(\log 2 = 0.69314718\cdots)。$$

$R_4(1)$ 的精确度竟比 $T_8(1)$ 的精确度高几乎 10^5 倍。这说明开展某些函数的有理逼近或一般非线性逼近的研究是很有必要的。

§1. 非线性一致逼近

首先讨论如下有理分式:

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{1.1}$$

其中 $P_m(x) \in H_m$, $Q_n(x) \in H_n$ 分别为 x 的 m, n 次多项式。设 $R_{m,n}(x)$是既约有理分式,即 $P_m(x)$与 $Q_n(x)$互质。

设 $f(x)$是有界闭区间$[a, b]$上的连续函数。定义偏差函数 $f(x) - R_{m,n}(x)$的绝对值的上确界为 $R_{m,n}(x)$与$f(x)$的最大偏差,简称为偏差:

$$\Delta(R_{m,n}) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - R_{m,n}(x)|。\tag{1.2}$$

又定义量

$$\rho_{m,n}(f) = \inf_{R_{m,n}} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - R_{m,n}(x)| \tag{1.3}$$

为(1.1)形有理分式类 $\{R_{m,n}(x)\}$ 对给定函数 $f(x)$ 的最佳逼近或最小偏差。

关于偏差的下界估计,有

定理 1 (Vallée-Poussin) 设多项式 $A(x) = a_0x^{m-\mu} + \cdots + a_{m-\mu}$, $B(x) = b_0x^{n-\nu} + \cdots + b_{n-\nu}$ 互质,其中 $0 \leqslant \mu \leqslant m$, $0 \leqslant \nu$

$\leqslant n$, $a_0 \neq 0$。且设

$$R(x)=A(x)/B(x)$$

于$[a, b]$区间上为有穷，差函数 $f(x)-R(x)$ 在 $[a, b]$ 中的点列

$$x_1<x_2<\cdots<x_N$$

上以正负交错的符号取异于 0 的值

$$\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots,\ (-1)^{N-1}\lambda_N$$

(不妨假定各个 $\lambda_j>0$)。而且 $N=m+n-d+2$, $d=\min(\mu, \nu)$，则对每一形如(1.1)的函数 $Q(x)$，恒有

$$\Delta(Q)\geqslant\min\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N\}。\tag{1.4}$$

当 $R(x)\equiv 0$ 且 $N=m+2$ (即 $d=n$) 时，此不等式仍然成立。

【证】 采用反证法。假若存在一个形如 (1.1) 的函数 $Q(x)$，满足

$$\Delta(Q)<\min\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N\}。$$

考虑差

$$\begin{aligned}\eta(x)&=Q(x)-R(x)\\&=[f(x)-R(x)]-[f(x)-Q(x)]。\end{aligned}$$

显然 $\eta(x_1)$, $\eta(x_2)$, $\cdots$, $\eta(x_N)$ 不等于 0 且正负交错变号。由于 $\eta(x)$于$[a, b]$上连续，根据连续函数的中间值定理，$\eta(x)$于(a, b)内至少有 $N-1=m+n-d+1$ 个零点。然而

$$\eta(x)=Q(x)-R(x)=v(x)/u(x)$$

中分子 $v(x)$的次数$\leqslant\max\{m+n-\mu,\ m+n-\nu\}\leqslant m+n-d$。从而必有 $\eta(x)\equiv 0$，亦即 $Q(x)\equiv R(x)$。此与定理假设相矛盾，是故定理得证。

定理 2 在所有形如(1.1)的有理分式中，至少存在一个有理分式 $Q(x)$，使得

$$\Delta(Q)=\min。$$

【证】 只须证明存在形如 (1.1) 的有理分式 $Q(x)$，使得

$$\Delta(Q)=\rho_{m,n}(f)。$$

下面我们将具体地构造出 $Q(x)$ 来。按下确界的定义，存在无穷函数序列 $\{Q_i(x)\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\Delta(Q_i)=\rho_{m,n}(f),$$

其中
$$Q_i(x)=\frac{q_{0i}x^m+q_{1i}x^{m-1}+\cdots+q_{mi}}{p_{0i}x^n+p_{1i}x^{n-1}+\cdots+p_{ni}}。$$

将 $Q_i(x)$ 标准化，使之满足

$$p_{0i}^2+p_{1i}^2+\cdots+p_{ni}^2=1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)。$$

我们来证明相应的系数 $q_{ji}(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 也是有界的。事实上，设

$$\Delta(Q_i)<M \quad (i=1,\ 2,\ \cdots),$$

又设 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{m+1}$ 为 $(a,\ b)$ 内给定的互异点，则对其中任一点 ξ，必有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{q_{0i}\xi^m+q_{1i}\xi^{m-1}+\cdots+q_{mi}}{p_{0i}\xi^n+p_{1i}\xi^{n-1}+\cdots+p_{ni}}\right|\\&\leqslant\left|\frac{q_{0i}\xi^m+q_{1i}\xi^{m-1}+\cdots+q_{mi}}{p_{0i}\xi^n+p_{1i}\xi^{n-1}+\cdots+p_{ni}}-f(\xi)\right|+|f(\xi)|\\&\leqslant M+\max_{a<x<b}|f(x)|。\end{aligned}$$

从而有正常数 K 存在，使得

$$|q_{0i}\xi^m+q_{1i}\xi^{m-1}+\cdots+q_{mi}|<K。$$

由于多项式 $q_{0i}x^m+q_{1i}x^{m-1}+\cdots+q_{mi}$ 于 $m+1$ 个点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m+1}$ 处的值是有界的，比方设它们依次为 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{m+1}$，则按线性方程组

$$q_{0i}\xi_j^m+q_{1i}\xi_j^{m-1}+\cdots+q_{mi}=k_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1)$$

可以解出 q_{li} 的一个表达式 $(l=0,\ \cdots,\ m)$。显然可知这些 $q_{li}(l=0,\ \cdots,\ m)$ 均有界。

由于 $p_{lj}(j=0, \cdots, n)$ 和 $q_{ll}(l=0, \cdots, m)$ 有界，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，在有理分式序列 $\{Q_i(x)\}$ 中可以选出某子序列（不妨仍记为）$\{Q_i(x)\}$，使

$$\lim_{i\to\infty} p_{ij}=a_j, \quad \lim_{i\to\infty} q_{il}=b_l。$$

作(1.1)型有理分式函数

$$P(x)=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n},$$

以下往证 $\Delta(P)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|=\rho_{m,n}(f)$。

因为 $P(x)$ 只可能在有限多个点处变为无穷，而在 $[a, b]$ 区间的其它点 $\tilde{x}$ 处，显然

$$\lim_{i\to\infty} Q_i(\tilde{x})=P(\tilde{x})。\tag{1.5}$$

所以

$$\begin{aligned}|P(\tilde{x})|&\leqslant|f(\tilde{x})|+|f(\tilde{x})-Q_i(\tilde{x})|+|Q_i(\tilde{x})-P(\tilde{x})|\\&\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\Delta(Q_i)+\varepsilon_i。\end{aligned}$$

即除去可能在有限个点处不满足外，总有

$$|P(x)|\leqslant N=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+M。$$

从而上式于区间 $[a, b]$ 上处处成立，即 $P(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上处处有限，所以(1.5)式处处成立。

由于 $P(x)$ 各系数与 $Q_i(x)$ 各相应系数之间的极限关系，不难看出极限关系式

$$\lim_{i\to\infty} Q_i(x)=P(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

在 $[a, b]$ 上一致成立。这样一来，若于

$$\begin{aligned}&\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|\\&\quad\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-Q_i(x)|+\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-Q_i(x)|\end{aligned}$$

两边令 i 趋于无穷，立得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|\leqslant\rho_{m,n}(f)。$$

是故 $\Delta(P)\leqslant\rho_{m,n}(f)$。又显然有

$$\rho_{m,n}(f)\leqslant\Delta(P),$$

所以最终证得

$$\Delta(P)=\rho_{m,n}(f)。$$

存在性定理 2 证毕。

根据定理 2，存在(1.1)形的有理分式 $R(x)$，使得

$$\Delta(R)=\rho_{m,n}(f), \tag{1.6}$$

其中 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数。称满足 (1.6) 的有理分式为 $f(x)$ 于 (1.1) 所示有理分式类中的最佳一致逼近有理分式。下面的 Чебышев 定理对最佳一致逼近有理分式的特征作了确切的描述。

定理 3 形如(1.1)的有理分式函数中在 $[a,b]$ 上与 $f(x)$ 偏差最小的有理分式 $P(x)$ 由下述特征所唯一确定*)。

若将 $P(x)$ 写成

$$P(x)=\frac{b_0x^{m-\mu}+b_1x^{m-\mu-1}+\cdots+b_{m-\mu}}{a_0x^{n-\nu}+a_1x^{n-\nu-1}+\cdots+a_{n-\nu}}=\frac{B(x)}{A(x)},$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 互质，$a_0\neq0$, $0\leqslant\mu\leqslant m$, $0\leqslant\nu\leqslant n$。则在 $[a, b]$ 上使 $f(x)-P(x)$ 以正负交错的符号达到 $\Delta(P)$ 的点列之点数 $N\geqslant m+n-d+2$，其中 $d=\min(\mu, \nu)$。若 $P(x)\equiv0$，则 $N\geqslant m+2$。

【证】 充分性证明。设

$$N\geqslant m+n-d+2。$$

并于定理 1 中取 $|\lambda_k|=\Delta(P)$，则知对任何形如 (1.1) 的有理分式 $Q(x)$，必有

*) 此处所说的唯一性，乃指经约分化简后为相同的有理分式者。

$$\Delta(Q) \geqslant \Delta(P)。$$

从而 $P(x)$ 是最佳逼近有理分式。

必要性证明。采用反证法。设满足要求的偏离点的个数为 $N' \leqslant m+n-d+1$，往证 $P(x)$ 必不是最佳逼近有理分式。将 $[a, b]$ 分为如下的 N' 个子区间：

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \cdots, [\xi_{N'-1}, b], \tag{1.7}$$

使之在上述区间上轮流满足

$$-\Delta(P) \leqslant f(x) - P(x) < \Delta(P) - \alpha$$

和

$$-\Delta(P) + \alpha < f(x) - P(x) \leqslant \Delta(P),$$

并且(1.7)中每个区间内只含一个偏离点。

为证 $P(x)$ 不是最佳者，只须能求得 (1.1) 形有理分式 $Q(x)$，使得

$$\Delta(Q) < \Delta(P) \tag{1.8}$$

成立即可。

引入多项式

$$\Phi(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{N'-1}),$$

显然它在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N'-1}$ 处依次变号。

由于 $A(x)$ 与 $B(x)$ 互质，于是存在次数分别为 m 与 n 的多项式 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$，使得

$$A(x)\varphi(x) + B(x)\psi(x) = 1。$$

今于上式两边同乘多项式 $\Phi(x)$，得到

$$\Phi(x) = A(x)\varphi(x)\Phi(x) + B(x)\psi(x)\Phi(x)。 \tag{1.9}$$

用 $B(x)$，$A(x)$ 分别去除(带余) $\varphi(x)\Phi(x)$，$\psi(x)\Phi(x)$：

$$\begin{aligned} \varphi(x)\Phi(x) &= B(x)q_1(x) + r_1(x), \\ \psi(x)\Phi(x) &= A(x)q_2(x) + r_2(x), \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $r_1(x) \in H_{m-\mu}$，$r_2(x) \in H_{n-\nu}$ 分别为 $m-\mu$，$n-\nu$ 次多项式。

将(1.10)代入(1.9)，有

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=A(x)B(x)q_1(x)+A(x)B(x)q_2(x)\\&\quad+A(x)r_1(x)+B(x)r_2(x)\\&=B(x)\{A(x)[q_1(x)+q_2(x)]+r_2(x)\}+A(x)r_1(x)\\&=B(x)u(x)+A(x)v(x),\end{aligned}$$

其中 $u(x)$, $v(x)$ 为次数分别不高于 n, m 的多项式。

作有理分式

$$Q(x)=\frac{B(x)\Omega(x)-\omega v(x)}{A(x)\Omega(x)+\omega u(x)},$$

于是

$$\begin{aligned}P(x)-Q(x)&=\frac{B(x)}{A(x)}-\frac{B(x)\Omega(x)-\omega v(x)}{A(x)\Omega(x)+\omega u(x)}\\&=\frac{\omega[B(x)u(x)+A(x)v(x)]}{A(x)[A(x)\Omega(x)+\omega u(x)]}\\&=\frac{\omega\Phi(x)}{A(x)[A(x)\Omega(x)+\omega u(x)]}。\end{aligned}$$

因为，显然

$$\begin{aligned}f(x)-Q(x)&=[f(x)-P(x)]+[P(x)-Q(x)]\\&=[f(x)-P(x)]\\&\quad+\frac{\omega\Phi(x)}{A(x)[A(x)\Omega(x)+\omega u(x)]},\end{aligned}\tag{1.11}$$

于是只须特别取 $\Omega(x)\equiv1$，并取 $|\omega|$ 充分小，则在调节 ω 正、负号的前提下可以保证(1.11)最后一等号右端第二项恰与第一项在各偏离点上的值异号。从而，只须对充分小的 ω 取(1.1)形有理分式

$$Q(x)=\frac{B(x)-\omega v(x)}{A(x)+\omega u(x)},$$

则可保证不等式(1.8)成立。必要性得证。

最后来证明唯一性，采用反证法。设还有(1.1)形有理分

式 $Q(x)$，使得

$$\Delta(Q)=\Delta(P)=\rho_{m,n}(f)。$$

假设与 $Q(x)$ 相应的量 N', μ', ν', d' 与 N, μ, ν, d 意义相同。由必要性，知

$$N'\geqslant m+n-d'+2, \quad N\geqslant m+n-d+2。$$

为确定起见，不妨假定 $N'\geqslant N$。

设 $$\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{N'}$$

为相应于 $Q(x)$ 的偏离点。考虑差函数

$$\begin{aligned}\eta(x)&=P(x)-Q(x)\\&=[f(x)-Q(x)]-[f(x)-P(x)]。\end{aligned}$$

若 β_j 点同样也是 $P(x)$ 的同类（同正或同负）偏离点，则

$$\eta(\beta_j)=0。$$

否则，$\eta(\beta_j)\neq 0$，但此时必然有

$$\operatorname{sign}\eta(\beta_j)=\operatorname{sign}[f(\beta_j)-Q(\beta_j)]。\qquad (1.12)$$

例如若设

$$\eta(\beta_{i-1})\neq 0,\ \eta(\beta_i)=\cdots=\eta(\beta_{i+k})=0,\ \eta(\beta_{i+k+1})\neq 0。$$

由于 $$(-1)^{i-1}[f(\beta_{i-1})-Q(\beta_{i-1})]$$

与 $$(-1)^{i+k+1}[f(\beta_{i+k+1})-Q(\beta_{i+k+1})]$$

同号，从而根据(1.12)知

$$\operatorname{sign}\eta(\beta_{i-1})=\operatorname{sign}(-1)^k\eta(\beta_{i+k+1})。\qquad (1.13)$$

当 k 为偶数时，由 (1.13)，$\eta(x)$ 于区间 $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ 两端点上同号。于是 $\eta(x)$ 在该区间上有偶数个根。当 k 为奇数时，由(1.13)，$\eta(x)$于区间$[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$两端点上异号。于是 $\eta(x)$在该区间上有奇数个根。

总之，$\eta(x)$ 于 $[\beta_{i-1}, \beta_{i+k+1}]$ 区间中根的个数与 k 同奇偶。但已知 $\beta_i, \cdots, \beta_{i+k}$（共 $k+1$ 个）是 $\eta(x)$ 的根，于是为保证同奇偶，必有 $k+2$ 个根存在。依此推导，可知 $\eta(x)$于区间

$[a, b]$ 内至少应有 $N'-1$ 个根。但这是不可能的，因为 $\eta(x)=C(x)/D(x)$ 中分子 $V(x)$ 的次数

$$r=\begin{cases}\max\{m+n-\mu'-\nu,\ m+n-\mu-\nu'\}\leqslant N'-2, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 当\ P(x)\neq 0,\ Q(x)\neq 0, & \\ m-\nu'\leqslant N'-2, & 当\ P(x)\equiv 0, \\ m-\nu\leqslant N-2\leqslant N'-2, & 当\ Q(x)\equiv 0。\end{cases}$$

因而定理唯一性证完。

最后我们来证明，当 $P(x)\equiv 0$ 时，$P(x)$ 是最佳逼近有理分式必须且只须 $N\geqslant m+2$。

若 $N\geqslant m+2$，则于定理 1 所示的 Vallée-Poussin 定理中取

$$|\lambda_i|=\Delta(P)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,$$

则对任何(1.1)形有理分式 $Q(x)$，均有

$$\Delta(Q)\geqslant\Delta(P)=|\lambda_i|.$$

从而 $P(x)$ 为最佳逼近有理分式。

反之，设 $P(x)\equiv 0$ 为最佳逼近有理分式，往证 $N\geqslant m+2$。若不然，设偏离点个数 $N'\leqslant m+1$。考虑

$$\Phi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{N'-1})。$$

作 $Q(x)=\omega\Phi(x)$，其中 ω 为一充分小实数。则可以同前面必要性证明一样而引出矛盾。至此定理全部证完。

D. J. Newman 曾经讨论了 $|x|$ 有理逼近的误差估计问题。下面我们来介绍有关结果。

若 $r_n(x)$ 是两个 n 次互质多项式的商

$$r_n(x)=P_n(x)/Q_n(x)\quad(-\infty<x<\infty),$$

则称 $r_n(x)$ 为 n 阶有理函数。定义

$$\rho_n(f)=\inf_{r_n}\sup_{x\in\Delta}|f(x)-r_n(x)|,$$

其中 A 为实数集合，$r_n(x)$ 取遍一切 n 阶有理函数。根据关于函数类的"宽度"的研究可知，对于性质较好的函数来说，有理逼近的优越性不大。然而，对于有较小奇异性的函数，有理逼近却非常有效。下面来考察函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-1,1]=A$ 上用 n 阶有理函数逼近的误差估计问题。Newman 证明了下述

定理 4 当 $n\geqslant 5$ 时恒有

$$\rho_n(|x|)\leqslant 3e^{-\sqrt{n}}。\tag{1.14}$$

【证】 设 $a=e^{-1/\sqrt{n}}$。则当 n 充分大时，a 接近于 1，而 a^{n-1} 却接近于 0。先来证明估计式

$$\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1-a^j}{1+a^j}\leqslant e^{-\sqrt{n}}\quad(n\geqslant 5)。\tag{1.15}$$

事实上，利用数学分析中的典型方法不难证明

$$\frac{1-t}{1+t}\leqslant e^{-2t}，当 t\geqslant 0。$$

从而

$$\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1-a^j}{1+a^j}\leqslant\exp\left\{-2\sum_{j=1}^{n-1}a^j\right\}=\exp\left\{-2\frac{a-a^n}{1-a}\right\}。$$

又，当 $n\geqslant 5$ 时，

$$2(a-a^n)\geqslant 2(e^{-1/\sqrt{5}}-e^{-\sqrt{5}})>1。$$

对于所有 $t\geqslant 0$，还有

$$1-e^{-t}\leqslant t,$$

所以

$$\frac{1}{1-a}\geqslant\sqrt{n}。$$

是故估计式(1.15)成立。

现在设

$$p(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x+a^k),\quad r_n(x)=\frac{x[p(x)-p(-x)]}{p(x)+p(-x)}。\tag{1.16}$$

显然 $r_n(x)$ 是 n 阶有理函数。我们来证明

$$\left||x|-r_n(x)\right|<3e^{-\sqrt{n}} \quad (n\geqslant 5,\ -1\leqslant x\leqslant 1)。\tag{1.17}$$

因为 $|x|$ 与 $r_n(x)$ 都是偶函数，为证(1.17)只须考虑 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的情形。对于 $0\leqslant x\leqslant a^n=\exp(-\sqrt{n})$ 部分的 x，由于 $p(-x)\geqslant 0$，从而

$$0\leqslant r_n(x)\leqslant x。$$

故有
$$\left||x|-r_n(x)\right|\leqslant x\leqslant e^{-\sqrt{n}}\leqslant 3e^{-\sqrt{n}},$$

即当 $0\leqslant x\leqslant a^n$ 时(1.17)式成立。

当 $a^n\leqslant x\leqslant 1$ 时，必存在某个 $j(0\leqslant j\leqslant n-1)$，使得 $a^{j+1}\leqslant x\leqslant a^j$。于是由(1.15)，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(-x)}{p(x)}\right| &= \prod_{k=1}^{j}\frac{a^k-x}{a^k+x}\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{x-a^k}{x+a^k}\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{j}\frac{a^k-a^n}{a^k+a^n}\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{a^j-a^k}{a^j+a^k}\\ &= \prod_{m=n-j}^{n-1}\frac{1-a^m}{1+a^m}\prod_{m=1}^{n-j-1}\frac{1-a^m}{1+a^m}\\ &= \prod_{m=1}^{n-1}\frac{1-a^m}{1+a^m}\leqslant e^{-\sqrt{n}}。\end{aligned}$$

因此当 $a^n\leqslant x\leqslant 1$ 时，由于下述不等式成立($0\leqslant x\leqslant 1$)：

$$\left||x|-r_n(x)\right| = 2x\left|\frac{p(-x)}{p(x)+p(-x)}\right|\leqslant\frac{2}{\left|\dfrac{p(x)}{p(-x)}\right|-1},$$

所以
$$\left||x|-r_n(x)\right|\leqslant\frac{2}{e^{\sqrt{n}}-1}\leqslant 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n\geqslant 5)。$$

定理 4 证完。

Newman 还证明了

$$\rho_n(|x|)\geqslant\frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}} \quad (n\geqslant 5)。\tag{1.18}$$

综合(1.14)与(1.18)，可知

$$\frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}}\leqslant\rho_n(|x|)\leqslant 3e^{-\sqrt{n}}\quad(n\geqslant 5)。\tag{1.19}$$

它比 $f(x)=|x|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最佳 n 次多项式逼近的误差阶 $O(1/n)$ 要优越得多。

D. Newman 的不等式 (1.19) 可以用来估计某些函数的有理逼近的误差阶。Szusz, Turán 以及 Freud 等曾经从事过这方面的工作。

§2. 有理函数插值

给定 $m+n+1$ 个互异的点

$$x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n}$$

和相应的函数值

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \cdots,\ f(x_{m+n}),$$

希望构造一个有理分式函数

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}=\frac{a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0},\tag{2.1}$$

使之满足插值条件

$$R_{m,n}(x_j)=f(x_j)\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n)。\tag{2.2}$$

这种问题就是所谓**有理函数插值问题**。

显然，当分母次数 $n=0$ 时，$R_{m,n}(x)$ 是一个 m 次的多项式，从而插值问题(2.2)的解存在并且唯一。但是，当 $n>0$，即(2.1)所示的 $R_{m,n}(x)$ 真正是一个有理分式函数时，插值问题(2.2)是否对任何右端 $\{f(x_j)\}$ 皆有唯一解存在呢？

且看下述几个例子。

例 1 设 $m=0$，$f(x_j)=0$，$f(x_k)\neq 0$，

$$R_{0,n}(x)=\frac{a_0}{b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0}。$$

于是由 $R_{0,n}(x_j)=0$ 推知 $a_0=0$。但是当 $a_0=0$ 时，显然

$$R_{0,n}(x_k)\neq 0$$

不成立。是故此时相应插值问题无解。

例 2 设 $m=n=1$, 且

$$f(x_1)=f(x_2)\neq f(x_3)。$$

则由相应插值条件,必有

$$\frac{a_1x_1+a_0}{b_1x_1+b_0}=\frac{a_1x_2+a_0}{b_1x_2+b_0}。$$

于是
$$(a_0b_1-a_1b_0)(x_2-x_1)=0,$$

而 $x_1\neq x_2$, 从而

$$a_0b_1=a_1b_0。$$

若 $b_1=0$, 则 $R_{1,1}(x)$ 退化为一次多项式,既然 $R_{1,1}(x)$ 于 $x=x_1$, x_2 处的值一样(假定),说明 $y=R_{1,1}(x)$ 是一条平行于 x 轴的直线。当然也就不可能满足

$$R_{1,1}(x_3)\neq f(x_3)$$

了。所以不妨设 $b_1\neq 0$。于是

$$a_0=a_1b_0/b_1,$$

从而

$$R_{1,1}(x)=\frac{a_1x+a_0}{b_1x+b_0}=\frac{a_1x+a_1b_0/b_1}{b_1x+b_0}$$

$$=\frac{a_1(b_1x+b_0)}{b_1(b_1x+b_0)}=\frac{a_1}{b_1}=\text{const}。$$

这样一来,又不可能满足插值条件中所要求的条件

$$R_{1,1}(x_1)\neq R_{1,1}(x_3)$$

了。总之,本例所示有理插值问题的解不存在。

为便于讨论,需要引进一些定义。两个有理分式

$$R_1(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\quad R_2(x)=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \tag{2.3}$$

称为恒等,如果存在一个非零常数 a, 使得

$$P_2(x)=aP_1(x),\ Q_2(x)=aQ_1(x)。$$

此时常记 $R_1(x)\equiv R_2(x)$。

(2.3)所示两有理分式 $R_1(x)$，$R_2(x)$称为是等价的，如果

$$P_1(x)\cdot Q_2(x)\equiv P_2(x)\cdot Q_1(x)。$$

此时常记 $R_1(x)\sim R_2(x)$。

对于此处所定义的关系 ~，显然有下列三性质：

(i) $R(x)\sim R(x)$；

(ii) $R(x)\sim Q(x)$，$Q(x)\sim S(x)$，则 $R(x)\sim S(x)$；

(iii) $R(x)\sim Q(x)$，则 $Q(x)\sim R(x)$。

所以 ~ 是一种等价关系。

显然可知，两有理分式 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 等价，必须且只须 $R_1(x)$和 $R_2(x)$的最简(既约)有理分式 $\bar{R}_1(x)$ 和 $\bar{R}_2(x)$ 恒等。

今后只要两有理分式等价，则认为它们是同一个有理分式，而不加以区别。有理函数插值的唯一性也是在这种意义上说的。

定理5 插值问题(2.2)若有解，则必唯一。

【证】 设

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)},\quad \bar{R}_{m,n}(x)=\frac{\bar{N}_m(x)}{\bar{D}_n(x)}$$

同时满足插值条件(2.2)：

$$R_{m,n}(x_j)=\bar{R}_{m,n}(x_j)=f(x_j)\quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

于是由 $$\frac{N_m(x_j)}{D_n(x_j)}=\frac{\bar{N}_m(x_j)}{\bar{D}_n(x_j)}\quad (j=0,\ \cdots,\ m+n),$$

可推知

$$N_m(x_j)\bar{D}_n(x_j)=\bar{N}_m(x_j)D_n(x_j)\quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

因为 $N_m(x)\bar{D}_n(x)$ 与 $\bar{N}_m(x)D_n(x)$ 为次数不高于 $m+n$ 的多项式，所以从上式可知

$$N_m(x)\overline{D}_n(x)\equiv\overline{N}_m(x)D_n(x)。$$

从而 $R_{m,n}(x)\sim\overline{R}_{m,n}(x)$。定理 5 证完。

定理 5 说明对于有理函数插值来说，关键的问题是存在性和具体解法。

我们知道，当(2.1)所示的有理分式 $R_{m,n}(x)$ 满足插值条件(2.2)时，只要分母 $D_n(x_j)\neq 0(j=0,\cdots,m+1)$，就应有

$$N_m(x_j)-f(x_j)D_n(x_j)=0\quad(j=0,\cdots,m+n),\qquad(2.4)$$

它是一个关于系数 $a_m,\cdots,a_0,b_n,\cdots,b_0$ 的线性代数方程组。这当然比非线性方程组(2.2)要容易求解了。

那么，(2.2) 在什么条件下会与 (2.4) 等价呢?下面定理 6 对这个问题作了明确的回答。

定理 6 设线性方程组 (2.4) 有非平凡解。为使满足插值条件(2.2)的最简有理分式 $R_{m,n}(x)=p_m(x)/q_n(x)$存在，必须且只须(2.4)的任一非平凡解 $N_m^*(x)$，$D_n^*(x)$在约去一切公共因子后所得的互质多项式 $A(x)$，$B(x)$ 仍然是 (2.4) 的解，即

$$A(x_j)-f(x_j)B(x_j)=0\quad(j=0,\cdots,m+n)。$$

【证】 必要性。设 $N_m^*(x)$与 $D_n^*(x)$是 (2.4) 的任一组非平凡解：

$$N_m^*(x_j)-f(x_j)D_n^*(x_j)=0\quad(j=0,\cdots,m+n)。\qquad(2.5)$$

按假设，有(2.1) 型的最简有理分式 $t(x)/v(x)$ 存在，使插值条件(2.2)得以满足：

$$\frac{t(x_j)}{v(x_j)}=f(x_j)\quad(j=0,\cdots,m+n)。\qquad(2.6)$$

由于 $t(x)$与 $v(x)$互质，所以 $v(x_j)\neq 0$。因为否则为使上式成立，必亦有 $t(x_j)=0$，是故 $t(x)$与 $v(x)$有公共因子$(x-x_j)$了。以(2.6)代入(2.5)，得到

$$N_m^*(x_j)-\frac{t(x_j)}{v(x_j)}D_n^*(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

两边通乘以 $v(x_j)$，得到

$$N_m^*(x_j)v(x_j)-t(x_j)D_n^*(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

这样一来，次数不超过 $m+n$ 的多项式

$$N_m^*(x)v(x)-t(x)D_n^*(x)$$

已有 $m+n+1$ 个互异的根，从而

$$N_m^*(x)v(x)-t(x)D_n^*(x)\equiv 0。$$

在上式中约去 $N_m^*(x)$ 与 $D_n^*(x)$ 的最大公因子，则有

$$A(x)v(x)-t(x)B(x)\equiv 0。$$

特别地，也应有

$$A(x_j)v(x_j)-t(x_j)B(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

因 $v(x_j)\neq 0$，以其遍除上式得到

$$A(x_j)-\frac{t(x_j)}{v(x_j)}B(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

注意到(2.6)式，上式亦即

$$A(x_j)-f(x_j)B(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

必要性得证。

充分性。设如上定义的 $A(x)$，$B(x)$ 是(2.4)的解：

$$A(x_j)-f(x_j)B(x_j)=0 \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

可断言 $B(x_j)\neq 0$。因为否则由上式，必也有 $A(x_j)=0$。从而与 $A(x)$，$B(x)$ 互质的假定相矛盾。既然如此，我们可以 $B(x_j)$ 遍除上式两边，而得到

$$\frac{A(x_j)}{B(x_j)}=f(x_j) \quad (j=0,\ \cdots,\ m+n)。$$

是故 $A(x)/B(x)$ 满足插值条件(2.2)。充分性得证。定理 6 全部证完。

定理 6 建立了(2.2)与(2.4)等价的充分必要条件。然而

由于所给条件仍不便于检定，所以 N. Macon 与 D. E. Dupree 还给出了便于检验的条件。

定理 7 设 $(x_j, y_j)(j=0, \cdots, m+n)$ 中各 $x_j(j=0, \cdots, m+n)$ 是互异的。为使满足插值条件(2.2)的最简有理分式

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}$$

存在，必须且只须下述各矩阵

$$\Delta_j=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^{n-1}y_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{j-1} & x_{j-1}^2 & \cdots & x_{j-1}^{m-1} & y_{j-1} & x_{j-1}y_{j-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1}y_{j-1} \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdots & x_{j+1}^{m-1} & y_{j+1} & x_{j+1}y_{j+1} & \cdots & x_{j+1}^{n-1}y_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n}y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1}y_{m+n} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$(j=0, \cdots, m+n)$$

都是非奇异的，其中 $y_j=f(x_j)(j=0, \cdots, m+n)$。

定理 7 的证明要用到若干引理，此处不拟开出。

H. Salzer 讨论了切触有理插值问题。设 $N(x)$, $D(x)$ 是 x 的二个多项式，$x_1, \cdots, x_r$ 是互异实数，$f^{(j)}(x_i)$, $j=0, 1, \cdots, s_i-1$ 为一批给定的数。所谓*切触有理插值*，就是确定 $N(x)$和 $D(x)$的系数，使得

$$\frac{d^j}{dx^j}\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]\bigg|_{x=x_i}=f^{(j)}(x_i) \tag{2.8}$$

$$(j=0, 1, \cdots, s_i-1;\ i=1, \cdots, r)。$$

若 $d=\sum\limits_{i=1}^{r}s_i$，通常取 $N(x)$和 $D(x)$的次数相等或接近相等。即当 d 为奇数时，$N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数皆取成$[d/2]$；当 d 为偶数时，$N(x)$和 $D(x)$的次数则分别取$[d/2]$和$[d/2]-1$。

设 $D(x_i)\neq 0$。一般有理函数插值问题

$$\frac{N(x_i)}{D(x_i)}=f(x_i) \quad (i=1, \cdots, r)$$

自然等价于 $N(x_i)=[D(x)f(x)]_{x=x_i}\quad(i=1,\cdots,r)$。

一阶切触插值

$$\left.\frac{N(x)}{D(x)}\right|_{x=x_i}=f(x_i),\ \left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]'_{x=x_i}=f'(x_i),\tag{2.9}$$

可以表示为

$$N(x_i)=[D(x)f(x)]_{x=x_i},\ \frac{N'(x_i)}{D(x_i)}-\frac{N(x_i)D'(x_i)}{[D(x_i)]^2}=f'(x_i)。\tag{2.10}$$

后一等式中又可以 $f(x_i)$ 代替 $N(x_i)/D(x_i)$ 然后用 $D(x_i)$ 遍乘而化为 $N'(x_i)=f(x_i)D'(x_i)+f'(x_i)D(x_i)$。因而 (2.9) 最后化成

$$\begin{aligned}N(x_i)&=[D(x)f(x)]_{x=x_i},\\ N'(x_i)&=[D(x)f(x)]'_{x=x_i}。\end{aligned}\tag{2.11}$$

完全类似地，二阶切触有理插值可转化为

$$N(x_i)=[D(x)f(x)]_{x=x_i},\ N'(x_i)=[D(x)f(x)]'_{x=x_i},$$
$$N''(x_i)=[D(x)f(x)]''_{x=x_i}。\tag{2.12}$$

一般情况下，是否也可把有理切触插值

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i)\quad(m=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1)\tag{2.13}$$

化成等价形式(当 $D(x_i)\neq 0$ 时)呢？这里

$$N^{(m)}(x_i)=\frac{d^m}{dx^m}(D(x)f(x))_{x=x_i}\quad(m=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1)。\tag{2.14}$$

回答是肯定的。这可以用数学归纳法来证明。事实上，由前面的分析，已知当 $r=s_i-1=0,\ 1$ 时，(2.13) 和 (2.14) 是等价的。今设当 $r=s-1$ 时，(2.13) 与 (2.14) 是等价的。往证当 $r=s$ 时，它们也是等价的。其实只须再证明

$$\frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)_{x=x_i}=f^{(s)}(x_i) \tag{2.15}$$

与

$$N^{(s)}(x_i)=\frac{d^s}{dx^s}(D(x)f(x))_{x=x_i} \tag{2.16}$$

等价就够了。

设(2.16)成立。因由 Leibnitz 公式

$$N^{(s)}(x_i)=\frac{d^s}{dx^s}(D(x)f(x))=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}f^{(k)}(x_i)D^{(s-k)}(x_i), \tag{2.17}$$

$$N^{(s)}(x_i)=\left[\frac{N(x)}{D(x)}D(x)\right]^{(s)}_{x=x_i}$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^{(k)}_{x=x_i}D^{(s-k)}(x_i)。 \tag{2.18}$$

由归纳法假定，后一式右端中 $[N(x)/D(x)]^{(k)}_{x=x_i}(k=0, 1, \cdots, s-1)$。因而比较上两式右端，即知

$$f^{(s)}(x_i)=\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]^{(s)}_{x=x_i}。$$

也即(2.15)成立。

反之，假定(2.15)式成立。则由(2.18)，有

$$N^{(s)}(x_i)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^{(k)}_{i}D^{(s-k)}(x_i)$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}f^{(k)}(x_i)D^{(s-k)}(x_i)$$

$$=[f(x)D(x)]^{(s)}_{x=x_i}。$$

即(2.16)成立。

总之，我们已建立了

定理 8 设 $D(x_i)\neq 0$，则有理切触插值问题

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i)\quad(m=0,\ \cdots,\ s_i-1)$$

与下述线性问题

$$N^{(m)}(x_i)=\left(\frac{d}{dx}\right)^m[D(x)f(x)]_{x=x_i}\quad(m=0,\ \cdots,\ s_i-1)$$

是等价的。

若把定理 8 中的微商换成有限差(等距情况)或差商，则可以建立类似的定理。另外，当 $N(x)$ 与 $D(x)$ 不是普通多项式，而是广义多项式时，定理 8 也是照样成立的。

由定理 8 可知，只要各个 $D(x_i)\neq 0$，则有理切触插值问题(2.8)便等价于线性方程组

$$N^{(m)}(x_i)=\left(\frac{d}{dx}\right)^m[D(x)f(x)]_{x=x_i}\tag{2.19}$$

$$(m=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1;\ i=1,\ \cdots,\ r)。$$

下面我们应用定理 8 来具体讨论有理切触插值的构造问题。Salzer 具体讨论了下述连分式作为有理分式 $N(x)/D(x)$：

$$\frac{N(x)}{D(x)}=a_{1,0}+\frac{x-x_1}{a_{1,1}}+\frac{x-x_1}{a_{1,2}}+\cdots+\frac{x-x_1}{a_{1,s_1-1}}$$
$$+\frac{x-x_1}{a_{2,0}}+\frac{x-x_2}{a_{2,1}}+\cdots+\frac{x-x_2}{a_{2,s_2-1}}$$
$$+\frac{x-x_2}{a_{3,0}}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{a_{r,0}}+\frac{x-x_n}{a_{r,1}}+\cdots$$
$$+\frac{x-x_n}{a_{r,s_r-1}}。\tag{2.20}$$

为讨论方便，先介绍一些有关连分式的预备知识：

1° 连分式 $b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}+\cdots$ 表示

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}} \tag{2.21}$$

2° 分式 a_n/b_n 称为连分式(2.21)的第 n 节；a_n 与 b_n 称为连分式(2.21)的第 n 节的两项；a_1, a_2, ··· 称为连分式(2.21)的部分分子，b_1, b_2, ··· 称为连分式 (2.21) 的部分分母。有限连分式

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}=\frac{P_n}{Q_n}$$

称为连分式(2.21)的第 n 个渐近分式。

3° 相邻三个渐近分式之间有递推关系式

$$\begin{cases}P_n=b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2},\\Q_n=b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}。\end{cases} \tag{2.22}$$

事实上，按连分式的定义，

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{b_0}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{b_0b_1+a_1}{b_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=b_0+\frac{a_1b_2}{b_1b_2+a_2}$$

$$=\frac{b_0b_1b_2+b_0a_2+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}=\frac{b_2P_1+a_2P_0}{b_2Q_1+a_2Q_0}。$$

这说明当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，(2.22) 式成立(已人为地取定 $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$)。设递推公式(2.22)对 n 已成立，即

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2}}{b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}}。$$

往证当 n 换为 $n+1$ 时，(2.22)也成立。注意从 P_n/Q_n 变到 P_{n+1}/Q_{n+1} 应以 b_n+a_{n+1}/b_{n+1} 代替 b_n，于是

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{b_nP_{n-1}+\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}P_{n-1}+a_nP_{n-2}}{b_nQ_{n-1}+\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}Q_{n-1}+a_nQ_{n-2}}$$

$$=\frac{b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1}}{b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1}}。$$

所以对一切正整数 n 而言，递推公式(2.22)恒成立（其中 $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$）。

下面回过头来继续讨论 (2.20) 所述 $N(x)/D(x)$ 的切触插值问题。假定 $a_{1,0}, a_{1,1}, \cdots, a_{i-1,s_{i-1}-1}$ 已经求出，于是由 (2.20) 可以求出它的渐近分式 $P_{t-1}(x)/Q_{t-1}(x)$, $P_{t-2}(x)/Q_{t-2}(x)$，此处 $t-1=\sum_{j=1}^{i-1}s_j$。根据递推关系(2.22)，有

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{R_i(x)P_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})P_{t-2}(x)}{R_i(x)Q_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})Q_{t-2}(x)},\quad(2.23)$$

其中

$$R_i(x)=a_{i,0}+\frac{x-x_i}{a_{i,1}}+\frac{x-x_i}{a_{i,2}}+\cdots+\frac{x-x_i}{a_{i,s_i-1}}+\frac{x-x_i}{a_{i+1,0}}+\frac{x-x_{i+1}}{a_{i+1,1}}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_{n,s_n-1}}。\quad(2.24)$$

当按(2.23)所示的 $N(x)/D(x)$ 和切触条件(2.8)（其中 $x=x_i$）来确定 $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,s_i-1}$ 时（共 s_i 个条件），$R_i(x)$ 表达式中的项

$$\frac{x-x_i}{a_{i+1,0}}+\frac{x-x_{i+1}}{a_{i+1,1}}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_{n,s_n-1}}$$

是可以忽略的。若记

$$\frac{S_i(x)}{T_i(x)}=a_{i,0}+\frac{x-x_i}{a_{i,1}}+\frac{x-x_i}{a_{i,2}}+\cdots+\frac{x-x_i}{a_{i,s_i-1}},$$

则由定理 8, $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 两多项式的系数应该满足

$$\{S_i(x)P_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)P_{t-2}(x)\}^{(m)}|_{x=x_i}$$
$$=[f(x)\{S_i(x)Q_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)Q_{t-2}(x)\}]^{(m)}|_{x=x_i}$$
$$(m=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1)。\qquad (2.25)$$

由此求出 $S_i(x)/T_i(x)$ 表达式中的各系数 $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,s_i-1}$。于是 (2.24) 的渐近分式 $P_t(x)/Q_t(x)$, $P_{t+1}(x)/Q_{t+1}(x)$, $\cdots$ 可按递推公式

$$\left.\begin{aligned}
P_{t+k}(x) &= a_{i,k}P_{t+k-1}(x) \\
&\quad + \left.\begin{matrix}(x-x_{i-1}) \\ (x-x_i)\end{matrix}\right\} P_{t+k-2}(x) \quad \begin{matrix}当\ k=0, \\ 当\ k=1,\ \cdots,\ s_i-1,\end{matrix} \\
Q_{t+k}(x) &= a_{i,k}Q_{t+k-1}(x) \\
&\quad + \left.\begin{matrix}(x-x_{i-1}) \\ (x-x_i)\end{matrix}\right\} Q_{t+k-2}(x) \quad \begin{matrix}当\ k=0, \\ 当\ k=1,\ \cdots,\ s_i-1\end{matrix}
\end{aligned}\right. \qquad (2.26)$$

来逐个地确定。用 $i+1$ 替代 i, 用 $t+s_i$ 替代 t 又可重复上述各步骤……当具有较小的 s_i 值时，比如 $s_i=2$, $s_{i+1}=3$, $\cdots$, 则立即可以比较方便地在多个点处应用公式(2.25)。

Euler-Minding 曾经推导出关于有限连分式 $S_i(x)/N_i(x)$ 的具体有理分式表达：

$$\begin{aligned}
S_i(x) &= a_0a_1\cdots a_{s_i-1}+[1+\sum_{0\leqslant j\leqslant s_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1} \\
&\quad + \sum\sum_{0\leqslant j<k\leqslant s_i-3}(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2} \\
&\quad + \sum\sum\sum_{0\leqslant j<k<l\leqslant s_i-4}(x-x_i)^3/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}a_{l+2}a_{l+3}+\cdots]
\end{aligned} \qquad (2.27)$$

和

$$\begin{aligned}
T_i(x) &= a_1a_2\cdots a_{s_i-1}[1+\sum_{1\leqslant j\leqslant s_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1} \\
&\quad + \sum\sum_{1\leqslant j<k\leqslant s_i-3}(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}+\cdots],
\end{aligned}$$

其中 $a_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1)$ 表示 $a_{i,j}(j=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1)$。

具体写出，可列下表：

s_i	$S_i(x)$	$T_i(x)$
1	a_0	1
2	$a_1a_0+(x-x_i)$	a_1
3	$a_2a_1a_0+(a_2+a_0)(x-x_i)$	$a_2a_1+(x-x_i)$
4	$a_3a_2a_1a_0+(a_3a_2+a_3a_0+a_1a_0)$ $\times(x-x_i)+(x-x_i)^2$	$a_3a_2a_1+(a_3+a_1)(x-x_i)$
5	$a_4a_3a_2a_1a_0+(a_4a_3a_2+a_4a_3a_0$ $+a_4a_1a_0+a_2a_1a_0)(x-x_i)$ $+(a_4+a_2+a_0)(x-x_i)^2$	$a_4a_3a_2a_1+(a_4a_3+a_4a_1$ $+a_2a_1)(x-x_i)+(x-x_i)^2$
6	$a_5a_4a_3a_2a_1a_0+(a_5a_4a_3a_2$ $+a_5a_4a_3a_0+a_5a_4a_1a_0$ $+a_3a_2a_1a_0)(x-x_i)+(a_5a_4$ $+a_5a_2+a_5a_0+a_3a_2+a_3a_0$ $+a_1a_0)(x-x_i)^2+(x-x_i)^3$	$a_5a_4a_3a_2a_1+(a_5a_4a_3+a_5a_4a_1$ $+a_5a_2a_1+a_3a_2a_1)(x-x_i)$ $+(a_5+a_3+a_1)(x-x_i)^2$

§3. Padé 逼近方法

一个函数的 Taylor 级数展开的系数同该函数值的关系问题，既是一个有深刻意义的数学问题，又是一个重要的实际问题。它是数学分析研究的基础，又是遍及许多物理和生物学中数学模型的实际计算基础。如所知，如果一个 Taylor 级数展开绝对收敛，则它唯一确定一函数的值，且该函数任意次可微。反之，如果一个函数任意次可微，则它也唯一确定一个 Taylor 级数展开。此时实际上我们可以用多项式来逼近给定的函数。当然这种功能是有一定限度的。考虑

$$f(x)=\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/2}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{13}{16}x^3-\frac{141}{128}x^4+\cdots。\quad (3.1)$$

容易看到当 $x>1/2$ 时，上述 Taylor 级数是不收敛的。当然也就不能用它来计算 $f(\infty)=\sqrt{2}$ 了！

如果作变量替换

$$x=w/(1-2w)\quad 或\quad w=x/(1+2x),$$

则

$$f[x(w)]=(1-w)^{-1/2}$$
$$=1+\frac{1}{2}w+\frac{3}{8}w^2+\frac{5}{16}w^3+\frac{35}{128}w^4+\cdots\quad (3.2)$$

于 $w=1/2\,(x=\infty)$ 处是收敛的。取 Taylor 级数(3.2)的前几个截断多项式于 $w=1/2$ 的值，即可得 $\sqrt{2}=f(\infty)$ 的近似值

$$1,\ 1.125,\ 1.34375,\ 1.38281,\ 1.39990,\ \cdots。\quad (3.3)$$

还原于原先的变量 x，则 (3.2) 的前几个关于 w 的截断多项式，正是 x 的下列有理分式

$$1,\ \frac{1+(5/2)x}{1+2x},\ \frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{(1+2x)^2},\ \cdots。\quad (3.4)$$

下面我们考虑获取由 Taylor 级数展开式(3.1)所定义函数 $f(x)$ 的其它有理分式逼近的一种重要方法——Padé 逼近方法。

考虑 $f(x)$ 的这样一种有理分式逼近

$$(a+bx)/(c+dx),$$

使其 Taylor 级数展开的前三项同(3.1)的前三项相重合，于是求得

$$\frac{1+(7/4)x}{1+(5/4)x}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{25}{32}x^3-\frac{125}{128}x^4+\cdots。\quad (3.5)$$

按它算出 $\sqrt{2}=f(\infty)\doteq1.4$, 它比 (3.3) 所给近似为好。考虑 $f(x)$ 的下述有理分式:

$$(a+bx+cx^2)/(d+ex+hx^2),$$

使其 Taylor 级数展开的前五项同 (3.1) 的前五项相重合,则得到

$$\frac{1+(13/4)x+(41/16)x^2}{1+(11/4)x+(29/16)x^2}。\tag{3.6}$$

由它算得 $\sqrt{2}=f(\infty)\doteq\frac{41}{29}=1.413793103$。往下,按同样思路分别考虑分子(母)为 3 次, 4 次和 5 次多项式之有理分式,使其 Taylor 级数展开与 (3.1) 的前七项,九项和十一项相重合。于是相应求得 $\sqrt{2}=f(\infty)$ 的下述近似值:

$$1.414201183,\ 1.414213198 \text{ 和 } 1.414213552。\tag{3.7}$$

$\sqrt{2}$ 同最后一近似的误使仅为 10^{-8}。足见这种算法还是很优越的。由此即可引导出一般的 Padé 逼近方法。

设 $f(x)$ 是由下述形式幂级数所定义:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j。\tag{3.8}$$

$f(x)$ 的 $[L/M]$ Padé 逼近为

$$[L/M]=P_L(x)/Q_M(x),\tag{3.9}$$

其中 $P_L(x)\in H_L$, $Q_M(x)\in H_M$ 分别为次数不超过 L, M 的多项式。(3.9) 中 $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 的系数,按下述方程来确定:

$$f(x)-P_L(x)/Q_M(x)=O(x^{L+M+1})。\tag{3.10}$$

因为一个有理分式的分子、分母同乘一常数其值不变,我们特地要求分母 $Q_M(x)$ 满足标准化条件

$$Q_M(0)=1.0。\tag{3.11}$$

最后要求 $P_L(x)$ 与 $Q_M(x)$ 无公共因子存在。

若记

$$P_L(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_Lx^L,$$
$$Q_M(x)=1+q_1x+\cdots+q_Mx^M, \tag{3.12}$$

则由标准化条件(3.11)，可用 $Q_M(x)$ 遍乘 (3.10) 式以线性化系数方程。于是比较系数可得线性方程组

$$\begin{cases} a_0 & =p_0, \\ a_1+a_0q_1 & =p_1, \\ a_2+a_1q_1+a_0q_2 & =p_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_L+a_{L-1}q_1+\cdots+a_0q_L & =p_L, \\ a_{L+1}+a_Lq_1+\cdots+a_{L-M+1}q_M & =0, \\ \vdots & \vdots \\ a_{L+M}+a_{L+M-1}q_1+\cdots+a_Lq_M & =0, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中已规定

$$a_n\equiv 0 \quad (\text{当 } n<0), \qquad q_j\equiv 0 \quad (\text{当 } j>M)。 \tag{3.14}$$

为方便计，记

$$L+M=N,\ L-M=J。 \tag{3.15}$$

Frobenius 和 Padé 曾采用条件 $Q_M(x)\neq 0$ 来替代标准化条件(3.11)。这两类条件显然是不相同的。事实上，作为例子考虑

$$f(x)=1+x^2+\cdots。$$

对于 $L=M=1$，容易验证

$$P_1(x)=Q_1(x)=x,\ P_1(x)/Q_1(x)=1,$$

满足 $$Q_M(x)f(x)-P_L(x)=O(x^{N+1})$$

而不满足(3.10)。按我们的定义，该幂级数的[1/1]逼近是不存在的。

下面的唯一性定理，无论按那种规定都是成立的。

定理9(Frobenius-Padé) 对于任意形式幂级数 $f(x)$，若其 $[L/M]$Padé 逼近存在，则必唯一。

【证】 仅就标准化条件(3.11)的情况来证明。假定有两个这样的 Padé 逼近

$$\frac{X(x)}{Y(x)},\ \frac{U(x)}{V(x)},$$

其中 $X(x)$, $U(x)\in H_L$, $Y(x)$, $V(x)\in H_M$。按(3.10)，必然有

$$\frac{X(x)}{Y(x)}-\frac{U(x)}{V(x)}=O(x^{L+M+1})。\qquad(3.16)$$

今以 $Y(x)V(x)$ 遍乘(3.16)式两边，可得

$$X(x)V(x)-U(x)Y(x)=O(x^{L+M+1})。\qquad(3.17)$$

因为(3.17)式的左端为一个次数不超过 $L+M$ 的多项式，为使(3.17)成立，只有

$$X(x)V(x)-U(x)Y(x)$$

恒为0。因为 $Y(x)$ 与 $V(x)$ 不恒为0，因而有

$$\frac{X(x)}{Y(x)}=\frac{U(x)}{V(x)}。$$

因为按定义 $X(x)$ 与 $Y(x)$，$U(x)$ 与 $V(x)$ 互质且 $Y(0)=V(0)=1.0$。唯一性得证。

上述定理的成立与否，是与定义方程的奇异性无关的。当非奇异时，可直接求解而得 $[L/M]$ Padé 逼近：

$$[L/M]=\frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum\limits_{j=M}^{L} a_{j-M}x^j & \sum\limits_{j=M-1}^{L} a_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{L} a_j x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}},\qquad(3.18)$$

在上述各求和号中，若下标超过上标时，该和为0。这个结果是Jacobi得到的。

常把一函数$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j$的Padé逼近列成一张所谓"Padé表"。

$$\begin{array}{ccccc}
[0/0] & [0/1] & [0/2] & [0/3] & \cdots \\
[1/0] & [1/1] & [1/2] & [1/3] & \cdots \\
[2/0] & [2/1] & [2/2] & [2/3] & \cdots \\
[3/0] & [3/1] & [3/2] & [3/3] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

例1 $f(x)=e^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$的Padé逼近表见第233页。

令$x=1$，则可得e的相应Padé逼近表，其中

$$[1/1]=3,\ [2/2]=19/7,$$

$$[3/3]=193/71,\ [4/4]=2721/1001。$$

2721/1001与e真值的误差仅在第八位小数上相差1。

大量具体算例表明，在$N=L+M$为一确定常数时，所有各可能的$[L/M]$Padé逼近中，以L和M相等或接近相等者为最精确。比如，当$N=2n$时，我们应该采用$[n/n]$Padé逼近；当$N=2n+1$时，我们应该采用$[n+1/n]$或$[n/n+1]$ Padé逼近。总而言之，应该采用Padé逼近表的主对角或主对角线附近的Padé逼近。

为了得到比(3.18)更为紧凑的表现形式，于(3.18)右端分子和分母两行列式中，均以第1列各元素减去第2列相应元素的x倍；以第2列各元素减去第3列相应元素的x倍；……则按行列式性质，其值是不变的，即得出

$L \backslash M$	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2}{2-2x+x^2}$	$\frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$	$\frac{24}{24-24x+12x^2-4x^3+x^4}$
1	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+2x}{6-4x+x^2}$	$\frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$	$\frac{120+24x}{120-96x+36x^2-8x^3+x^4}$
2	$\frac{2+2x+x^2}{2}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$	$\frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$	$\frac{360+120x+12x^2}{360-240x+72x^2-12x^3+x^4}$
3	$\frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$	$\frac{24+18x+16x^2+x^3}{24-6x}$	$\frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$	$\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$	$\frac{840+360x+60x^2+4x^3}{840-480x+120x^2-16x^3+x^4}$
4	$\frac{24+24x+12x^2+4x^3+x^4}{24}$	$\frac{120+96x+36x^2+8x^3+x^4}{120-24x}$	$\frac{360+240x+72x^2+12x^3+x^4}{360-120x+12x^2}$	$\frac{840+480x+120x^2+16x^3+x^4}{840-360x+60x^2-4x^3}$	$\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}$

$$
[L/M]=\frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^{L} a_jx^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}。 \tag{3.19}
$$

按行列式性质，上式分母以最后一列展开即可化为一个 M 阶行列式；同时对分子上的行列式施以变换：以 x^{j-M-1} 乘其第 j 列($j=1, \cdots, M$)，然后将它们统统加到最后一列则得到

$$
[L/M]=\frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L-M+1}x^{-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_Lx^{-M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^{L-M} a_jx^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} \end{vmatrix}}。 \tag{3.20}
$$

再将 (3.20) 的分子上的行列式按最后一行作 Laplace 展开，并且除 $\sum_{j=0}^{L-M} a_jx^j$ 的代数余子式外，其它各余子式均又按其最后一列作 Laplace 展开，则由逆矩阵的标准定义可知

$$[L/M]=\sum_{j=0}^{L-M}a_jx^j$$
$$+x^{L-M+1}\{w^T(L/M)W^{-1}(L/M)w(L/M)\},\tag{3.21}$$

其中 $W^{-1}(L/M)$ 是下述矩阵的逆矩阵

$$W(L/M)=\begin{pmatrix}a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M}\end{pmatrix},\tag{3.22}$$

而

$$w(L/M)=(a_{L-M+1},\ a_{L-M+2},\ \cdots,\ a_L)^T,\tag{3.23}$$

如果 $j<0$, 则规定 $a_j\equiv0$。当 $L<M$ 时, (3.21) 式中的和式 $\sum_{j=0}^{L-M}c_jx^j\equiv0$。纵使当 $M>L+1$ 时, 出现 x 的负幂, 等式 (3.21) 照样成立。

按照同样的方法也可得到另一种紧凑表达式

$$[L/M]=\sum_{j=0}^{L+n}a_jx^j$$
$$+x^{L+n+1}\{w^T(L+M/M)W^{-1}(L/M)w(L+n/M)\},\tag{3.24}$$

其中 $0\leqslant n\leqslant M$。

关于有理分式函数的 Padé 逼近式, 有

定理 10(Padé) 函数 $f_0(x)$ 具有形式

$$f_0(x)=\frac{\sum_{t=0}^{l}c_tx^t}{1+\sum_{u=1}^{m}e_ux^u},\tag{3.25}$$

必须且只须它的 Padé 逼近为

$$[L/M]=f_0(x),\tag{3.26}$$

只要 $L\geqslant l$, $M\geqslant m$。

【证】 若(3.25)的幂级数展开式为

$$f_0(x)=\sum_{t=0}^{\infty}d_t x^t, \tag{3.27}$$

则有($e_0=1$)

$$\left(\sum_{u=0}^{m}e_u x^u\right)\sum_{t=0}^{\infty}d_t x^t=\sum_{t=0}^{l}c_t x^t。 \tag{3.28}$$

选取任一给定的满足 $\pi_h(0)=1.0$ 的 h 次多项式 $\pi_h(x)$, 并取

$$P_L(x)=\sum_{r=0}^{L}p_r x^r\equiv\pi_h(x)\sum_{t=0}^{l}c_t x^t \quad (L\geqslant l+h),$$

$$Q_M(x)=\sum_{s=0}^{M}q_s x^s\equiv\pi_h(x)\sum_{u=0}^{m}e_u x^u \quad (M\geqslant m+h),$$

则由 (3.28) 可知它们满足定义 $[L/M]$Padé 逼近的方程组(3.13)。这表明由(3.25)定义的 $f_0(x)$确为它自己的 $[L/M]$ Padé 逼近。

反之,若对所有 $L\geqslant l$, $M\geqslant m$, 恒使(3.26)式成立, 则由 Padé 逼近方程,知

$$\left(\sum_{u=0}^{m}e_u x^u\right)\sum_{t=0}^{\infty}g_t x^t-\sum_{t=0}^{l}c_t x^t=O(x^{L+M+1})。 \tag{3.29}$$

因为 $e_0=1$, 对比(3.13)即可发现在每一方程中, 具有最高下指标的 g_t 的系数正好是 1.0。考虑足够大的 L 和 M, 采用把(3.29)右端看作是 0 的方法, 可以得到 x 任意次幂的系数。因此 (3.29) 提供了唯一由 (3.26) 给出的关于 g_t 的解。因为 g_t 等于 (3.27) 中的 d_t, 此即由 (3.26) 推出了 (3.25)。 定理证完。

定理 11 给定任一形式幂级数 (3.8) ($a_0\neq0$), 下面事实成立:

1° 对任一固定 M, 均存在 L_j 的一个无穷序列, 使得 $[L_j/M]$恒存在;

2° 对任一固定 L，均存在 M_j 的一个无穷序列，使得 $[L/M_j]$ 恒存在；

3° 对任一固定 J，均存在一无穷序列 M_j，使得 $[M_j+J/M_j]$ 恒存在。

该定理是 Baker 于 1973 年建立的。它表明任一形式幂级数总是可以采用 Padé 逼近方法而获得其有理逼近的。定理 11 的证明此处从略，有兴趣的读者可参阅 Baker, G. A., Jour. Math. Anal. Appl., **43** (1973), 498～528.

例 2 求 $\tanh \mu x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $\mu=\frac{1}{2}\log 3$ 的逼近。

先引出 $(\tanh \mu x)/x$ 的 $[2/4]$ Padé 逼近，并以 $x[2/4]$ 作为 $\tanh \mu x$ 的逼近。考虑 $(\tanh \mu x)/x$ 的幂级数

$$\frac{\tanh \mu x}{x}=\mu-\frac{\mu^3}{3}x^2+\frac{2\mu^5}{15}x^4-\frac{17\mu^7}{315}x^6+\frac{62\mu^9}{2835}x^8-+\cdots,$$

列出相应方程组(3.13)，则可求得

$$P_2(x)=\mu+\frac{2\mu^3}{21}x^2,$$

$$Q_4(x)=1+\frac{3\mu^2}{7}x^2+\frac{\mu^4}{105}x^4。$$

因而

$$[2/4]=\frac{P_2(x)}{Q_4(x)}=\frac{0.5493061443+0.0157853448x^2}{1+0.1293159601x^2+0.0008670987x^4}。$$

相应的 $\tanh \mu x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的 $[3/4]$ 逼近为 $xP_2(x)/Q_4(x)$：

$$\frac{0.5493061443x+0.0157853448x^3}{1+0.1293159601x^2+0.0008670987x^4}。$$

常按下法来估计 Padé 逼近的误差上界：取

$$P_2(x)-Q_4(x)(\tanh \mu x)/x$$

幂级数展开式中第一个非零项作为误差项，即为

$$-\frac{\mu^9}{99225}x^8。$$

于是用 $x[2/4]$ 逼近 $\tanh\mu x$ 的相对误差函数是

$$\frac{x[2/4]-\tanh\mu x}{\tanh\mu x}$$

$$=\frac{1}{Q_4(x)}\frac{P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\tanh\mu x}{x}}{\dfrac{\tanh\mu x}{x}}。$$

以 $-\mu^9x^8/99225$ 近似替代上式右端的分子，则相对误差函数近似为

$$\Delta=\left(-\frac{\mu^9}{99225}x^8\right)\Big/\left(Q_4(x)\frac{\tanh\mu x}{x}\right)。$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$Q_4(x)\geqslant 1,\ \frac{\tanh\mu x}{x}\geqslant\tanh\mu。$$

从而于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\Delta\leqslant\frac{\mu^9}{99225\cdot\tanh\mu}=0.9177\cdots\times 10^{-7}<0.92\times 10^{-7}。$$

$\tanh\mu x$ 于 $[-1,\ 1]$ 上最佳有理逼近为

$$R^*(x)=\frac{0.54930614401x+0.1574011995x^3}{1+0.12923360954x^2+0.00085891904x^4}。$$

其相对误差为 0.59×10^{-9}。

关于 Padé 逼近方法，我们还想再说几句话。因为 $f(x)$ 的 Padé 逼近也可以理解为从方程

$$Q_M(x)f(x)-P_L(x)=\text{一直到 } x^{L+M} \text{ 项系数为 } 0$$

中解出 $P_L(x)/Q_M(x)$ 所得的近似式。

1972 年 Shafer 提出考虑从

$$P_L(x)[f(x)]^2+Q_M(x)f(x)+R_N(x)$$
$$= \text{一直到 } x^{L+M+N+1} \text{ 项系数为 } 0 \qquad (3.30)$$

中解出 $f(x)$ 的方法，并以如此而得到的 $f(x)$ 逼近式作为 Padé 逼近的推广。

由于 $f(x)$ 的幂级数展开已知，从而 $[f(x)]^2$ 的幂级数展开也已知。这样由上述关系式可建立关于 $P_L(x)$，$Q_M(x)$ 和 $R_N(x)$ 各系数的线性方程组。从中可求出 $P_L(x)$，$Q_M(x)$ 和 $R_N(x)$ 而 $f(x)$ 的所谓 $[L/M/N]$ 二次逼近为

$$f(x) \doteq -\frac{Q_M(x) \pm \sqrt{Q_N^2(x)-4P_L(x)R_N(x)}}{2P_L(x)}。$$

有人甚至把(3.30)换成微分方程形式

$$P_9(x)\frac{d^2f}{dx^2}+Q_8(x)\frac{df}{dx}+R_6(x)f(x)=0$$

而考虑 Padé 逼近的新的推广。此处不拟详述了。

§4. 有理逼近的其它一些算法

4.1 Darboux 公式及其有关方法

研究积分

$$R_n=(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt。 \qquad (4.1)$$

反复作分部积分，可得出

$$R_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}(z-a)^{n-r}[\varphi^{(r)}(1)f^{(n-r)}(z)$$
$$-\varphi^{(r)}(0)f^{(n-r)}(a)]-\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)f(a+t(z-a))dt。$$

若其 $\varphi(t)$ 为一次数不超过 n 的多项式，则上式右端积分为零。于是有 Darboux 公式

$$\varphi^{(n)}(0)[f(z)-f(a)]$$
$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}(z-a)^r[\varphi^{(n-r)}(1)f^{(r)}(z)$$
$$-\varphi^{(n-r)}(0)f^{(r)}(a)]+R_n。\qquad(4.2)$$

当 $\varphi(t)=(t-1)^n$ 时，$\varphi^{(r)}(1)=0(r=0, 1, \cdots, n-1)$。这时(4.2)恰为 Taylor 公式(带余项)。

当 $\varphi(t)=t^n(t-1)^n$ 时，于相应 Darboux 公式中用 $2n$ 代替 n，则可得下列简化公式：

$$f(z)=f(a)+\sum_{r=1}^{n}\frac{(2n-r)!}{(2n)!}$$
$$\times\binom{n}{r}[f^{(r)}(a)-(-1)^r f^{(r)}(z)](z-a)^r+R_{2n},$$

此处 (4.3)

$$R_{2n}=(z-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n f^{(2n+1)}(a+t(z-a))dt。$$

(4.3) 式称为 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 公式，简称为 HSO 公式。

对于满足

$$f'(z)=R_1(z)f(z)+R_2(z)\qquad(4.4)$$

(其中 $R_1(z)$ 和 $R_2(z)$ 为 z 的任意给定的有理函数)的任一函数 $f(z)$，显然 (4.3) 式两边都有含 $f(z)$ 的项。只须从中把 $f(z)$ 作为未知元解出，即可得到 $f(z)$ 的一种有理逼近式。例如

$$e^z,\ e^{-z^2/2},\ 10^z,\ \log_b z,\ \mathrm{arc\,tg}\, z,$$
$$(z^2+1)^{-1/2}(c+\sinh^{-1}z),\quad z^{-n}(a+b\log z),$$
$$(1-z^2)^{-1/2},\ [R(x)]^{\alpha},$$

其中 $R(x)$ 为任意有理函数，而 α 为任意指定的实数等等函数，都可以采用 HSO 公式而获得相应的有理逼近式。

例1 设 $f(z)=e^z$，取 $a=0$。从相应公式 (4.3) 中解出 e^z，可得 e^z 的有理逼近式

$$e^z=\frac{\sum_{r=0}^{n}(2n-r)!\binom{n}{r}z^r+R_{2n}}{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(2n-r)!\binom{n}{r}z^r},\tag{4.5}$$

其中 $$R_{2n}=z^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n e^{tz}dt。$$

舍去(4.5)中的 R_{2n}，即得 e^z 的近似有理分式。

分别取 $n=0, 1, 2, \cdots$，则由(4.5)得到逼近式

$$\frac{1}{1},\ \frac{2+z}{2-z},\ \frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2},\ \frac{120+60z+12z^2+z^3}{120-60z+12z^2-z^3},\ \cdots$$

它们恰好为 e^z 的 [0/0]，[1/1]，[2/2]，[3/3]，…Padé 逼近。这自然是一个很有趣的巧合。

当然并不是一切函数的 HSO 逼近都能得到 Padé 逼近式的。事实上，如果取 $f(z)=\exp(\mathrm{arc\,tg}\,z)$，则其 HSO 逼近 ($a=0$，$n=1$) 为

$$f(z)\doteq\frac{1+\frac{1}{2}z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{1-\frac{1}{2}z+z^2}。$$

但相应的 Padé 逼近却为

$$f(z)\doteq\frac{1+0.84z+0.87z^2+\frac{17}{60}z^3}{1-0.16z+0.53z^2}。$$

例2 设 $f(z)=c\exp\frac{-z^2}{2}$ ($a=0$，$n=2$) 时，由 HSO 公式给出的逼近式为

$$f(z)\doteq\frac{(12-z^2)/\sqrt{2\pi}}{12+5z^2+z^4}。$$

它在$(-\infty, \infty)$上的最大误差为0.0125。

但如果采用Darboux公式，其中取$\varphi(t)$为$[0, 1]$区间上的最小零偏差多项式$T_n^*(x)$，则对同一个$f(z)$所得逼近式为

$$f(z)=\frac{(16-z^2)/\sqrt{2\pi}}{16+7z^2+z^4}。$$

它在$(-\infty, \infty)$上的最大误差为0.026。

4.2 微分修正算法(Cheney-Loeb算法)

对于给定的函数$f(x)$，有理逼近问题，相当于选取c, d使得

$$\Delta(c, d)=\sup_x |f(x)-\sum c_i x^i/\sum d_j x^j|=\min。$$

为了给出一个一般算法，考虑

$$\Delta(c)=\sup_i \frac{(A^i, c)+a_i}{(B^i, c)+b_i}, \qquad (4.6)$$

其中(A^i, c)表示A^i与c的内积，且c仅限于在下述区域内取值

$$D=\{c\in E_n \mid (B^i, c)+b_i>0, 对一切 i\}。 \qquad (4.7)$$

本节将仅限于i的取值范围是一个有限集合。

定理12(Cheney-Loeb)　$\Delta(c)$于区域D上的局部极小必然也是整体极小。

【证】　假若不然，即设有c^*是$\Delta(c)$在D上的非整体的局部极小值点。则存在点$c^0\in D$，使得

$$\Delta(c^0)<\Delta(c^*)。$$

作辅助函数

$$R^i(c)=\frac{(A^i, c)+a_i}{(B^i, c)+b_i},$$

并选取i，使

$$R^i(c^*)=\Delta(c^*)$$

且$R^i(c)$在c^0方向上是不减的。因$R^i(c)$于D中是连续可微

的，根据 Rolle 定理，存在点 $\lambda c^*+(1-\lambda)c^0(0<\lambda<1)$，使得

$$\frac{dR^i}{d\lambda}=0。$$

实际进行导数运算，有

$$\begin{aligned}\frac{dR^i}{d\lambda}=&\{[(B^i,c^0)+b_i](A^i,c^*-c^0)\\&-[(A^i,c^0)+a_i](B^i,c^*-c^0)\}\\&\times[(B^i,\lambda c^*+(1-\lambda)c^0)+b_i]^{-2}=0。\end{aligned}$$

不难看出 $\frac{dR^i}{d\lambda}$ 的分子不依赖于 λ。所以它只要在某一处为 0，必然处处为 0。是故应在连接 c^* 与 c^0 的线段上有

$$R^i(c)\equiv常数，$$

所以
$$\Delta(c^0)\geqslant R^i(c^0)=R^i(c^*)=\Delta(c^*)。$$

定理证毕。

定理 13 为使 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 中的极小值点，必须且只须线性不等式组

$$(A^i-\mu B^i,z)<0\quad(i\in I)\tag{4.8}$$

不相容，其中

$$\mu=\Delta(c^*),\qquad I=\{i\,|\,R^i(c^*)=\mu\}。\tag{4.9}$$

【证】 假设 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 上的极小值点。则对充分小的 z，有

$$\Delta(c^*+z)\geqslant\Delta(c^*)。$$

于是必存在某 $i\in I$，使得

$$\frac{(A^i,c^*+z)+a_i}{(B^i,c^*+z)+b_i}\geqslant\frac{(A^i,c^*)+a_i}{(B^i,c^*)+b_i}=\mu。$$

从而
$$(A^i-\mu B^i,c^*+z)+a_i-b_i\mu\geqslant0。$$

整理即得

$$(A^i-\mu B^i,z)+(A^i-\mu B^i,c^*)+a_i-b_i\mu\geqslant0。$$

按 μ 的定义，$(A^i-\mu B^i,c^*)+a_i-b_i\mu=0$。于是

$$(A^i-\mu B^i,\ z)\geqslant 0。$$

即(4.8)不相容。必要性得证。

反之，设(4.8)不相容。则对任何 z，都存在 $i\in I$ 使得

$$(A^i,\ z)\geqslant \mu(B^i,\ z)。$$

另一方面，按 μ 的定义，有

$$(A^i,\ c^*)+a_i=\mu[(B^i,\ c^*)+b_i],$$

上两式两边对应相加，得

$$(A^i,\ c^*+z)+a_i\geqslant \mu[(B^i,\ c^*+z)+b_i],$$

即

$$\Delta(c^*+z)\geqslant \frac{(A^i,\ c^*+z)+a_i}{(B^i,\ c^*+z)+b_i}\geqslant \mu=\Delta(c^*)。$$

是故 c^* 为极小值点。充分性得证。证毕。

今设 A_i, $B_i(i=1,\ \cdots,\ m)$ 为任意集合 D 上的实值函数，假定对一切 $c\in D$ 和 $i(i=1,\ \cdots,\ m)$，均有

$$0<\alpha\leqslant B_i(c)\leqslant \beta。\tag{4.10}$$

重新定义

$$\Delta(c)=\max_i \frac{A_i(c)}{B_i(c)}。\tag{4.11}$$

微分修正算法的具体算法如下：

1° 选取初始近似 $c^0\in D$;

2° 假定 c^{k-1} 已经求得 $(k=1,\ \cdots)$，往求辅助函数

$$\delta_k(c)=\max_i \frac{A_i(c)-\Delta(c^{k-1})B_i(c)}{B_i(c^{k-1})}\tag{4.12}$$

于 D 中的极小值点，并以其作为新的近似向量 c^k。

这样可形成一个向量序列 $\{c^k\}$。关于序列 $\{c^k\}$ 的极小化性质是 Cheney-Loeb 建立的：

定理 14(Cheney-Loeb) $\Delta(c^k)$ 随 k 的增大而单调下降，且

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(c^k)=\inf_{c\in D}\Delta(c)。\tag{4.13}$$

【证】 首先，由于 c^k 是 $\delta_k(c)$ 的极小值点：

$$\delta_k(c^k)\leqslant\delta_k(c^{k-1})$$

$$=\max_i\frac{A_i(c^{k-1})}{B_i(c^{k-1})}-\Delta(c^{k-1})=0。\tag{4.14}$$

对任意 c，亦有

$$\delta_k(c^k)\leqslant\delta_k(c)$$

$$=\max_i\left\{\left[\frac{A_i(c)}{B_i(c)}-\Delta(c^{k-1})\right]\frac{B_i(c)}{B_i(c^{k-1})}\right\},\tag{4.15}$$

于(4.15)中取 $c=c^k$，并利用(4.14)可得

$$\delta_k(c^k)\geqslant\frac{\beta}{\alpha}[\Delta(c^k)-\Delta(c^{k-1})]。\tag{4.16}$$

选取 $c\in D$，使得

$$\Delta(c)\leqslant\Delta(c^{k-1})。\tag{4.17}$$

这样的 c 若不存在，则 c^{k-1} 已为所求，从而无须讨论。由(4.15)，可知

$$\delta_k(c^k)\leqslant\frac{\alpha}{\beta}\max_i\left[\frac{A_i(c)}{B_i(c)}-\Delta(c^{k-1})\right]$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}[\Delta(c)-\Delta(c^{k-1})]。$$

于是联系(4.16)式可知

$$\Delta(c^k)-\Delta(c^{k-1})\leqslant\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta(c)-\Delta(c^{k-1})],$$

即
$$\Delta(c^k)\leqslant\Delta(c^{k-1})+\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta(c)-\Delta(c^{k-1})]。$$

根据下确界与下界关系，有

$$\Delta(c^k)\leqslant\Delta(c^{k-1})+\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta^*-\Delta(c^{k-1})]。\tag{4.18}$$

由(4.17)及上述不等式可知 $\Delta(c^k)\leqslant\Delta(c^{k-1})$，即 $\Delta(c^k)$ 单调下降。

若 $\Delta(c^k)$ 单调下降而趋于 $-\infty$，则显然 c^k 为极小化序列。否则 $\Delta(c^k)$ 随 k 无限增大而趋于确定的极限值。于是只须在(4.18)中令 $k\to\infty$，得出

$$\Delta^*-\lim_{k\to\infty}\Delta(c^{k-1})\geqslant 0。$$

但由 $\Delta^*\leqslant\Delta(c^{k-1})$，又有

$$\Delta^*\leqslant\lim_{k\to\infty}\Delta(c^{k-1})。$$

从而(4.13)式成立。定理 14 得证。

Cheney-Loeb 还指出：对 $c=(c_1, \cdots, c_N)$，设

$$\Delta(c)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(c, x)/Q(c, x)|,$$

其中 $f(x)\in C[a, b]$，而

$$P(c, x)=\sum_{i=1}^{n}c_ix^{i-1},\ Q(c, x)=\sum_{i=n+1}^{N}c_ix^{i-n-1}。$$

采用下述方法产生的序列 $\{c^k\}$，使得 $\Delta(c^k)\downarrow$ 且

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(c^k)=\Delta^*:$$

于单位方体 $|c_i^0|\leqslant 1$ 上选取 c^0，使于 $[a, b]$ 上 $Q(c^0, x)>0$；对给定 c^k，取

$$\delta_k(c)=\max_x\{|f(x)Q(c, x)-P(c, x)|-\Delta(c^k)Q(c, x)\}$$

于单位方体上的极小值点作为 $c^{k+1}\cdots$。

特别，当对 $\Delta(c)$ 的每个极小值点 c^* 而言，$P(c^*, x)$ 与 $Q(c^*, x)$ 均互质，则 $\lim_{k\to\infty}c^k=c^*$。

§5. Prony 指数型逼近方法

Prony 方法是一种获得指数型非线性逼近的重要算法。其目的是构造一个函数

$$f_a(t)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{s_jt},\tag{5.1}$$

使得

$$f_a(iT)=f_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-1), \tag{5.2}$$

其中 T 为步长，$\{f_i\}$ 为给定型值，$\{A_j\}$ 和 $\{s_j\}$ 为待求的 $2n$ 个参数。

引入新的变量

$$z_j=e^{s_jT} \quad (j=1,\ \cdots,\ n)。$$

并按下式定义变量 α_i:

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i z^i=(z-z_1)\cdots(z-z_n) \quad (\alpha_n=1)。 \tag{5.3}$$

于是(5.1)，(5.2)等价于

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}A_j z_j^i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-1)。 \tag{5.4}$$

由(5.3)和(5.4)可得方程组

$$\sum_{i=0}^{n}f_{k+i}\alpha_i=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}A_j z_j^{k+i}\right]\alpha_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}A_j z_j^k\left[\sum_{i=0}^{n}\alpha_i z_j^i\right]=0 \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)。$$

因为 $\alpha_n=1$，于是上述方程组可写为

$$\sum_{i=0}^{n-1}f_{k+i}\alpha_i=-f_{k+n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)。 \tag{5.5}$$

从中解出 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$($\alpha_n=1$ 为已知)。然后依据(5.3)式，求解高次代数方程

$$z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0=0, \tag{5.6}$$

得到 n 个根 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$。最后按公式

$$s_j=\frac{1}{T}\log z_j \quad (j=1,\ \cdots,\ n) \tag{5.7}$$

即可定出(5.1)中的指数 s_j 来。再由(5.4)中前 n 个方程组成的方程组解出(5.1)中的各个系数 $A_1,\ \cdots,\ A_n$。

以上就是 Prony 方法的概貌。下面来讨论 Prony 方法

与 Z 变换的关系。

所谓一个函数 $f(t)$ 的 Z 变换，乃是

$$F^s(z)=f_0+f_1z^{-1}+\cdots+f_{2n-1}z^{-(2n-1)}+\cdots, \qquad (5.8)$$

其中 $f_i=f(iT)$ $(i=0, 1, \cdots)$。按定义，显然 e^{s_jt} 的 Z 变换为

$$\mathscr{Z}\{e^{s_jt}\}=\frac{z}{z-e^{s_jT}}=\frac{z}{z-z_j}。$$

于是不难看出由 (5.1) 所给出的 $f_a(t)$ 的 Z 变换应该具有形式

$$F_a^s(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z}{z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1z+\alpha_0}。 \qquad (5.9)$$

我们希望 $F_a^s(z)$ 恰好为 $F^s(z)$ 的 Padé 逼近，即使

$$\begin{aligned}&a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z\\&\quad=(z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1z+\alpha_0)\\&\qquad\times(f_0+f_1z^{-1}+\cdots+f_{2n-1}z^{-(2n-1)}+\cdots)。\end{aligned}$$

两边从 z^n 至 $z^{-(n-1)}$ 的系数相等。这样得到由 $2n$ 个方程组成的方程组

$$\begin{cases}f_0=a_n,\\ f_0\alpha_{n-1}+f_1=a_{n-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_0\alpha_1+f_1\alpha_2+\cdots+f_{n-2}\alpha_{n-1}+f_{n-1}=a_1,\end{cases} \qquad (5.10)$$

$$\begin{cases}f_0\alpha_0+f_1\alpha_1+\cdots+f_{n-1}\alpha_{n-1}+f_n=0,\\ f_1\alpha_0+f_2\alpha_1+\cdots+f_n\alpha_{n-1}+f_{n+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{n-1}\alpha_0+f_n\alpha_1+\cdots+f_{2n-2}\alpha_{n-1}+f_{2n-1}=0。\end{cases} \qquad (5.11)$$

不难发现 (5.11) 与 (5.5) 是完全一样的。所以在 Padé 逼近 (5.9) 中的 $\{\alpha_i\}$ 和由此确定的 $\{z_j\}$、$\{s_j\}$ 等恰为 Prony 方法中的那些同名参数。

再注意到

$$\mathscr{Z}\left\{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{s_j t}\right\}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j z}{z-z_j}。$$

因此在求出(5.11)中的各个α_j以后，先按(5.10)求出各a_j，然后形成(5.9)中的有理函数$F_\alpha^*(z)$。最后依据恒等式

$$\frac{1}{z}F_\alpha^*(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{z-z_j}$$

即可定出各个系数$A_1, A_2, \cdots, A_n$来。

以上分析表明Prony方法从实质上讲，是与某相应Z变换的Padé逼近相通的。

例　设$f(t)$是单位方形脉冲

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant t<1,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } t=1,\\ 0, & \text{别处。}\end{cases}$$

取$n=3$, $T=1/3$, 型值则为

$$f_0=1,\ f_1=1,\ f_2=1,$$
$$f_3=1/2,\ f_4=0,\ f_5=0。$$

于是

$$F_\alpha^*(z)=\frac{a_3z^3+a_2z^2+a_1z}{z^3+\alpha_2z^2+\alpha_1z+\alpha_0}$$
$$=1+z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+f_6z^{-6}+\cdots$$

与(5.11)相对应的线性方程组为

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=-1/2,$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2=0,$$
$$\alpha_0+\frac{1}{2}\alpha_1=0。$$

其解是　　$\alpha_0=-1/2,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=-1。$

于是 $F_\alpha^s(z)$ 的分母为

$$z^3-z^2+z-1/2。$$

它的零点是

$$z_1=0.64780,\ z_{2,3}=0.17610\pm i0.86072。$$

$f_\alpha(t)$ 的指数则为

$$s_1=-1.30254,\ s_{2,3}=-0.38847\pm i4.10697。$$

又由(5.10)得出

$$a_3=1,\ a_2=0,\ a_1=1。$$

这样一来，应有

$$\frac{1}{z}F_\alpha^s(z)=\frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}。$$

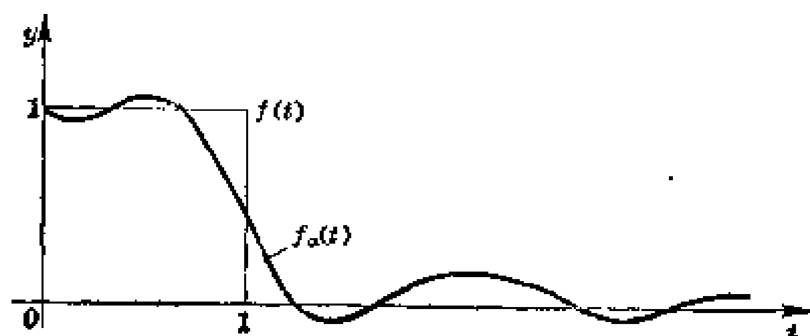
将其展成部分分式，求出

$$A_1=1.47367,\ A_{2,3}=-0.23683\mp i0.07480。$$

因此

$$\begin{aligned}f_\alpha(t)&=1.47367\cdot e^{-1.30254t}\\&\quad+2\mathrm{Re}[(-0.23683-0.07480i)e^{(-0.38847+4.10697i)t}]\\&=1.47367e^{-1.30254t}\\&\quad-0.49674e^{-0.38847t}\cdot\cos(4.10697t+0.30592)。\end{aligned}$$

其逼近情况如图所示。



第七章习题

1．设 $E(f)=\{t|f(t)\neq 0\}$，而 X, Y 分别是连续函数空间 $C[a,b]$ 中的 m, n 维线性子空间。$x_1(t)$, $\cdots$, $x_m(t)$ 和 $y_1(t)$, $\cdots$, $y_n(t)$ 分别是 X 和 Y 的两组基底。R_w 是满足下述两条件的有理函数

$$x(t)/y(t)=\left(\sum_1^m a_i x_i(t)\right)\Big/\left(\sum_1^n b_j y_j(t)\right)$$

所作成的类：

(i) $E(y)$ 于 $[a,b]$ 中稠密；

(ii) $f(t)=x(t)/y(t)$ 于 $E(y)$ 上一致连续。

若假定由 $y\in Y$, $y\not\equiv 0$ 即可推知 $E(y)$ 于 $[a,b]$ 中稠密。试证类 R_w 是 $C[a,b]$ 中的一个封闭子集（Newman 与 Shapiro）。

2．设 $f(t)=x(t)/y(t)$ 满足上题中的条件(i)且它在 $E(y)$ 上有界，则说 $f(t)$ 属于类 R_f。对任意 $g(t)\in C[a,b]$，记

$$\rho(g)=\inf_{f\in R_w}\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)|。$$

试在由 $y\in Y$, $y\not\equiv 0$ 即可推知 $E(y)$ 于 $[a,b]$ 中稠密的假定下，证明对任给 $g(t)\in C[a,b]$，存在 $f(t)=x(t)/y(t)\in R_f$，使得

$$|g(t)-f(t)|\le\rho(g),\ t\in E(y)$$

（Newman 与 Shapiro）。

3．设 $m(x)-n(x)y\equiv 0$，$m(x)$，$n(x)$ 为多项式，又设 $M(x)/N(x)$ 是由 $m(x)/n(x)$ 约去一切公因子所得到的有理函数。试证若

$$M(x_{j_r})/N(x_{j_r})\neq y_{jr}$$

对某 r, $1\le r\le n+1$ 成立，则 $(x-x_{j_r})$ 是 $n(x)$ 的因子。

4．试用辗转相除法把下述有理分式化为有限连分式：

$$\frac{2x^4+45x^3+381x^2+1353x+1511}{x^3+21x^2+157x+409}。$$

5．设 $R_0(x)/R_1(x)$ 是不可约有理分式，且设 $Q_k(x)$，$R_k(x)$ 是由下述带余除法所确定：

$$\begin{cases} R_{k-1}(x)=R_k(x)Q_k(x)+R_{k+1}(x), \\ R_{k+1}(x)\text{次数}<R_k(x)\text{次数}, \end{cases}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

则必有某正整数 n 存在，使 $R_{n+1}(x)=0$。试指出

$$\frac{R_0(x)}{R_1(x)}=Q_1(x)+\frac{1}{Q_2(x)}+\frac{1}{Q_3(x)}+\cdots+\frac{1}{Q_n(x)}。$$

6. 试求 $\cos x$ 的[6/6]级 Padé 逼近，并将它表成下述形式：

$$\frac{p_0+p_2x^2+p_4x^4+p_6x^6}{1+q_2x^2+q_4x^4+q_6x^6}。$$

估计它与 $\cos x$ 在区间[-1, 1]上的相对误差的上界。

7. 试用待定系数法确定下述连分式：

$$R(x)=a_0+\frac{x-x_1}{a_1}+\frac{x-x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_n}+\cdots$$

使其满足插值条件

$$R(x_j)=f(x_j)\quad (j=1, 2, \cdots)$$

(Thiele 连分式插值)。

8. 已知下述列表函数：

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.05	3.1	3.15	0.25	0.35	-0.05

试按 Prony 方法求 $f(x)$ 的指数型逼近式。

第八章 数值积分

§1. 数值积分的一般概念

在这一章，我们讨论定积分的近似计算问题。从微积分学中我们知道能够利用 Newton-Leibnitz 公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b}$$

去计算的定积分是很少的。事实上，在实际问题中，我们常常陷于无法利用初等函数去表出原函数 $\int f(x)\,dx$ 的困境。例如，对于概率积分与椭圆积分

$$P(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx \quad (0\leqslant t<\infty)$$

和

$$E(t)=\int_0^t \sqrt{1+k^2\sin^2 x}\,dx \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

来说，我们便遇到了上述的困难。因此由于实际问题的要求，我们便不能不考求定积分的近似计算问题。

以下，我们所讨论的求积公式绝大多数具有如下形式：

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx\cong\sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \tag{1.1}$$

其中 x_k 为求积公式的结点，A_k 为求积系数。通常，称右端的和为*求积和*；又称

$$E[f]=\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx-\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

为*求积误差*。有时，也将求积公式写成

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)+E[f].$$

在(1.1)式中，$[a, b]$是实直线上的有限或无限的区间；函数$\rho(x)$是已知的固定的函数且常常是$\rho(x)\equiv 1$，以后我们将称它为权函数。此外，我们还假定积分

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx, \quad \int_a^b \rho(x) x^m dx \quad (m=0, 1, 2, \cdots)$$

总是存在的，并且函数$f(x)$在点$x_1, \cdots, x_n$处是有定义的。

一般说来，求积公式(1.1)中的结点x_k和系数A_k可以按所希望的方式随意选取(除非是被积函数仅在一离散点集上是已知的，那时只好限制从离散点集中去选取x_k了)。自然，我们总是希望通过x_k和A_k的选取使得在某种意义下求积误差尽可能小。

概括来说，数值积分问题可分解为下述的三个主要问题：

(1) 精确性程度的衡量标准问题；

(2) 求积公式的具体构造问题；

(3) 余项估计问题(亦即，误差估计问题)。

为了合理地解决第一个问题，我们将引进代数精度的概念。为了解决第二个问题，我们必须考虑结点$x_1, x_k, \cdots, x_n$和求积系数$A_1, A_2, \cdots, A_n$的决定(或选择)问题。至于第三个问题，则主要是借助于内插多项式的余项估计公式来解决。

由第二章的 Weierstrass 多项式逼近定理可知，对于闭区间上的连续函数，都可以用多项式去一致地逼近它。换句话说，任一连续函数都可以用多项式作为它的最简单的近似函数。一般说来，多项式的次数取得越高，用它们来近似连续函数的程度也就越高。这自然使我们想到利用多项式的次数去规定求积公式的精确性程度(所谓代数精度)。

代数精度的概念是这样：就形如(1.1)式的求积公式来说，假如对$f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^m$(或次数$\leqslant m$的多项式)，

公式恒精确地成立(亦即 $E[f]=0$),而当 $f(x)=x^{m+1}$ 时公式就不精确成立,这样就称公式(1.1)的代数精度为 m。容易看出,m 越大,则就一般的连续函数 $f(x)$ 而言,公式(1.1)的右端数值与左端积分值的接近程度也就越高。事实上,当 m 越大时,用次数不高于 m 的多项式(例如 $p(x)$)去近似 $f(x)$ 亦就越好,即 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|=\delta_m$ 便越小,因而公式(1.1)的误差亦就越小。理由是,

$$\begin{aligned}\Delta_m&=\left|\int_a^b\rho(x)f(x)dx-\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)\right|\\&=\left|\int_a^b\rho(x)[f(x)-p(x)]dx-\sum_{k=1}^n A_k[f(x_k)-p(x_k)]\right|\\&\leqslant\int_a^b\rho(x)\delta_m dx+\sum_{k=1}^n|A_k|\delta_m。\end{aligned}$$

由此可见,引进代数精度的概念作为衡量求积公式的精确性是十分自然的。

下面的定理说明了具有代数精度的求积公式的存在性。

定理1 对于任意给定的 n 个不同的结点 $x_1,\cdots,x_n$,有常数 $A_1,\cdots,A_n$ 使得当 $f(x)$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式时求积公式(1.1)精确成立,亦即

$$\int_a^b\rho(x)f(x)dx=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)。$$

【证】 设已给定点 $x_1,\cdots,x_n$,并且 $p_{n-1}(x)$ 是函数 $f(x)$ 在这些点上的 Lagrange 插值多项式,亦即

$$f(x)=p_{n-1}(x)+E[f;x],$$

此处
$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^n l_k(x)f(x_k),$$

$$l_k(x)=\omega(x)/(x-x_k)\omega'(x_k),\quad \omega(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)。$$

于是

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

$$= \int_a^b \rho(x) p_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) E[f;\ x] dx。 \quad (1.2)$$

现在，我们定义

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx \quad (k=1, \cdots, n), \quad (1.3)$$

则(1.2)式变为

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \int_a^b \rho(x) E[f;\ x] dx。 \quad (1.4)$$

但是，若 $f(x) = q_{n-1}(x)$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式，则 $f(x) \equiv p_{n-1}(x)$。这意味着 $E[f;x] \equiv 0$，故

$$\int_a^b \rho(x) E[f;\ x] dx = 0。$$

证毕。

注意，上述定理并没有要求 x_k 一定要属于区间 $[a, b]$。另外，定理只是断言了，当 A_k 由(1.3)式决定时，公式(1.1)对于一切次数 $\leqslant n-1$ 的多项式是精确的，这个公式对较高次的多项式可能是精确的，也可能不是精确的。换言之，定理 1 说明了公式(1.1)的代数精度 $d \geqslant n-1$。

以后，我们称求积系数由(1.3)式决定的求积公式为**插值型求积公式**。由于对次数不超过 $n-1$ 次的任一多项式 $f(x)$ 说来，$E[f;x] \equiv 0$，所以 n 个结点的插值型求积公式的代数精度 $d \geqslant n-1$。反之，容易证明，代数精度 $d \geqslant n-1$ 的 n 个结点的求积公式一定是插值型求积公式。特别，当 $x_k (k=1, \cdots, n)$ 属于 $[a, b]$ 时，我们称公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{1.5}$$

为内插型求积公式，其中求积系数由下式确定：

$$A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx \quad (k=1, \cdots, n)。 \tag{1.6}$$

§2. Newton-Cotes 公式

设 $[a, b]$ 是一有限区间，$\rho(x) \equiv 1$。令 $h=(b-a)/n$, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $\cdots$, $x_n = a+nh=b$, 则依定理 1 有常数 A_k 使得求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.1}$$

对于一切次数$\leqslant n$的多项式是精确的。事实上，当 A_k 由(1.6)式决定时(注意，此时 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$; $k=0, 1, \cdots, n$)，上述求积公式的代数精度 $d \geqslant n$。以后，我们称 N 个结点的内插型求积公式为 N 点的 Newton-Cotes 公式。通常，称一个结点的 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + E[f] \tag{2.2}$$

为矩形公式；称 2 个结点的 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + E[f] \tag{2.3}$$

为梯形公式；称 3 个结点的 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}f(a) + \frac{4h}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h}{3}f(b) + E[f] \tag{2.4}$$

为 Simpson 公式。此处 $h=\frac{1}{2}(b-a)$。

现在，我们考虑在结点个数 n 无限增大的情况下

Newton-Cotes 公式的收敛性问题。下面定理的结论说明答案是否定的。

定理 2 设$[a, b]$是有限区间，并设已给出求积公式序列

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^n A_{k,n}f(x_{k,n})+E[f] \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)。$$

它们具有性质：

（i）$x_{k,n}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$是不相同的且在$[a, b]$中；

（ii）$A_{k,n}$使得n点公式对所有阶数$\leqslant n-1$的多项式是精确的。

如果当$n\to\infty$时，数列

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^n |A_{k,n}| \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

无限增大，则有函数$f(x)\in C[a, b]$使得数列

$$\sum_{k=1}^n A_{k,n}f(x_{k,n}) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

不收敛于积分$\int_a^b f(x)dx$。

定理 2′ 令$A_{k,n}$ $(k=0,\ \cdots,\ n)$表示$n+1$点 Newton-Cotes 公式中的系数，则当$n\to\infty$时数列

$$\sum_{k=1}^n |A_{k,n}|$$

无限增大。

定理 2 与定理 2′ 说明 Newton-Cotes 公式并不总是收敛于积分的真值。

由第一章插值余项公式(3.2)可知，梯形公式的求积误差为

$$E[f]=\int_a^b f(a,\ b,\ x)(x-a)(x-b)dx。 \qquad (2.5)$$

设 $f(x)$ 有连续的二阶微商，由于当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，

$$(x-a)(x-b) \leqslant 0,$$

所以对 (2.5) 式应用中值定理可知必有 $[a, b]$ 中的点 ξ_1 和 ξ 使得

$$E[f] = f(a, b, \xi_1)\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)。 \tag{2.6}$$

同理，Simpson 公式(2.4)的求积误差为

$$E[f] = \int_a^b f(a, b, c, x)(x-a)(x-b)(x-c)dx。 \tag{2.7}$$

设 $f(x)$ 有四阶连续的微商，由于

$$(x-a)dx = \frac{1}{2}d[(x-a)(x-b)],$$

故由分部积分公式和积分中值公式可得

$$E[f] = \frac{1}{4}\int_a^b f(a, b, c, x)d[(x-a)(x-b)]^2$$

$$= \frac{1}{4}\int_a^b f(a, b, c, x, x)[(x-a)(x-b)]^2dx$$

$$= \frac{1}{4}f(a, b, c, \xi_1, \xi_1)\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi) \quad (a<\xi<b)。 \tag{2.8}$$

从 Simpson 公式的求积误差公式 (2.8) 可以看出，Simpson 公式的代数精确度是 3。

从公式 (2.6) 和 (2.8) 看出：对给定的被积函数 $f(x)$ 而言，当积分区间缩短时，求积误差以更快的速度减小。因此在实际计算中为了保证计算的精度，往往首先用分点

$$x_i = a + i(b-a)/n \quad (i=0, 1, \cdots, n)$$

将区间$[a, b]$分成n个相等的子区间:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

而后对每个子区间再应用梯形公式(2.3)或Simpson公式(2.4)。例如,对每个子区间应用梯形公式(2.3),得到

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$=\frac{b-a}{2n}(f(x_i)+f(x_{i+1}))-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 f''(\xi_i)。$$

于上式中舍掉余项并对i从0到$n-1$求和,可得一个新的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right)。\tag{2.9}$$

上述求积公式的误差是

$$E_n[f]=-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)。\tag{2.10}$$

若$f''(x)$连续,由于ξ_i均为$[a, b]$的内点,所以由中值定理有

$$f''(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\quad (a<\xi<b)。$$

将其代入(2.10)式,得到

$$E_n[f]=-\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)。\tag{2.11}$$

公式(2.9)称为**复化梯形公式**,求积误差由(2.11)式确定。

同样,我们可以建立复化Simpson公式。用分点

$$x_j=a+j(b-a)/2n\quad (j=0, 1, \cdots, 2n)$$

将$[a, b]$分为$2n$等分。然后,在每个子区间

$$[x_0, x_2],\ [x_2, x_4],\ \cdots,\ [x_{2n-2}, x_{2n}]$$

上应用Simpson公式并求和,得到

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$
$$=\frac{b-a}{6n}\Big[f(a)+f(b)+4\sum_{i=0}^{n-1}f\Big(a+(2i+1)\frac{b-a}{2n}\Big)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}f\Big(a+i\frac{b-a}{n}\Big)\Big]+E_{2n}[f], \tag{2.12}$$

其中

$$E_{2n}[f]=-\frac{1}{2880}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i)$$
$$=-\frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{(4)}(\xi)\quad (a<\xi<b)。\tag{2.13}$$

递推关系是数值方法的重要技巧，它具有结构紧凑和便于在计算机上实现的特点。下面，仅以梯形公式为例介绍一下所谓的逐次分半算法。

首先在整个区间 $[a,b]$ 上应用梯形公式算出积分近似值 T_1；然后将 $[a,b]$ 二等分，对 $n=2$ 应用复化梯形公式算出 T_2；再将每个小区间二等分（即将 $[a,b]$ 四等分），对 $n=4$ 应用复化梯形公式算出 T_4；如此下去，直至相邻两个值之差小于允许误差为止。应注意，在计算后面的 T_{2n} 时可以利用前面算出的 T_n 的值：

$$T_{2n}=\frac{b-a}{2(2n)}\Big(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\Big(a+i\frac{b-a}{n}\Big)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}f\Big(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\Big)\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\left(T_n+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\Big)\right)$$
$$=\frac{1}{2}(T_n+H_{2n}), \tag{2.14}$$

其中

$$H_{2n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right) \qquad (2.15)$$

为复化中矩形公式。应用公式(2.14)和(2.15)计算 T_{2n} 时只要计算被积函数 $f(x)$ 在 n 个点处的值就可以了，可见递推算法减少了计算量。

现在，我们来看一看为什么可以通过相邻两个近似积分值之差来控制计算过程。令

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

则依(2.10)式可知

$$E_n[f]=I-T_n=-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i),$$

$$E_{2n}[f]=I-T_{2n}=-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\sum_{i=0}^{2n-1}f''(\eta_i)。$$

将两式相除并注意当 n 充分大时，

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)\approx\int_a^b f''(x)dx,$$

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}f''(\eta_i)\approx\int_a^b f''(x)dx,$$

则得到

$$\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4,$$

$$I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)。 \qquad (2.16)$$

(2.16)式说明，若两个相邻的积分近似值 T_n 与 T_{2n} 之差为允许误差，则 T_{2n} 与积分精确值之差大约是允许误差的三分之一，因此计算可以至此为止。误差之此种估计法称为后天估计(事后估计)。

对 Simpson 公式也有类似的算法，于此不细说了。比较公式(2.14)，(2.12)和(2.9)，可以得到复化 Simpson 公式与

梯形公式的如下关系：

$$S_{2n}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n。\tag{2.17}$$

§3. Romberg 方法

现在让我们比较一下复化梯形公式与复化 Simpson 公式。复化梯形公式仅对一次多项式精确成立，收敛速度是 $\left(\frac{1}{n}\right)^2$；而复化 Simpson 公式对所有次数不超过 3 的多项式精确成立，收敛速度是 $\left(\frac{1}{n}\right)^4$。所以一般说来 Simpson 公式要比梯形公式好。然而如果我们用逐次分半算法计算了 T_1, T_2, T_4, …，则依(2.17)式顺便就可以算出复化 Simpson 公式的值 S_2, S_4, …。同样，用 S_{2n} 和 S_{4n} 作适当的线性组合又可以得到更好的求积公式。这种用两个相邻的近似公式（其中一个公式是由另一个公式的分半得到的）的线性组合而得到更好的近似公式的方法，就是近代电子计算机上常用的 Romberg *求积方法*，*也叫逐次分半加速法*。形如(2.17)的公式也叫*逐次分半加速公式*。

公式(2.17)是由比较求积公式的系数得到的，下面想从另一个角度，即从近似求积余项的分析来引出这种加速公式的一般形式。

令
$$I=\int_a^b f(x)dx。$$

由复化梯形公式的余项

$$E_n^T[f]=I-T_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi),$$

$$E_{2n}^T[f]=I-T_{2n}=-\frac{(b-a)^3}{12(2n)^2}f''(\eta)$$

可以看出
$$4E_{2n}^T[f]-E_n^T[f]\cong 0$$

对所有次数不超过 2 的多项式精确成立。因此

$$4(I-T_{2n})-(I-T_n)\cong 0,$$

亦即 $$I\cong\frac{4}{4-1}T_{2n}-\frac{1}{4-1}T_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

对所有次数不超过 2 的多项式精确成立。事实上,它就是 § 2 中所讲述的 Simpson 求积公式,它对所有的 3 次多项式也是精确成立的。

同样由复化 Simpson 公式的求积误差表达式

$$E_{2n}^{S}[f]=I-S_{2n}=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi),$$

$$E_{4n}^{S}[f]=I-S_{4n}=-\frac{(b-a)^5}{2880(2n)^4}f^{(4)}(\eta)$$

可以看出 $$4^2E_{4n}^{S}[f]-E_{2n}^{S}[f]\cong 0$$

对所有次数不超过 4 的多项式精确成立。因此

$$4^2(I-S_{4n})-(I-S_{2n})\cong 0,$$

亦即

$$I\cong\frac{4^2}{4^2-1}S_{4n}-\frac{1}{4^2-1}S_{2n}\overset{\text{记为}}{=\!=}C_{4n}\qquad(3.1)$$

对所有次数不超过 4 的多项式精确成立。这就是复化 Cotes 公式。复化 Cotes 公式的余项为

$$\int_a^b f(x)dx-C_{4n}=-\frac{2}{945}\cdot\frac{(b-a)^7}{(4n)^6}f^{(6)}(\xi)。$$

因此,实际上复化 Cotes 公式(3.1)对 5 次多项式也是精确成立的。

当 $n=1$ 时,记 $y_i=f\left(a+i\frac{b-a}{4}\right)$,则有

$$C_4=\frac{4^2}{4^2-1}S_4-\frac{1}{4^2-1}S_2$$

$$=(b-a)\left(\frac{7}{90}y_0+\frac{32}{90}y_1+\frac{2}{15}y_2+\frac{32}{90}y_3+\frac{7}{90}y_4\right)。$$

上式即是 $n=4$ 时的 Newton-Cotes 公式，也称为 Cotes 公式。

类似地，我们可以将复化 Cotes 公式加速，从而得到更好的求积公式。

依此类推，可以得到一系列逐次分半加速公式，表列如下：

区间等分数	逐次分半加速公式	代数精度
n	梯形公式（T 公式）： T_n	1
$2n$	Simpson 公式（S 公式）： $S_{2n}=\frac{4}{4-1}T_{2n}-\frac{1}{4-1}T_n$	3
$4n$	Cotes 公式（C 公式）： $C_{4n}=\frac{4^2}{4^2-1}S_{4n}-\frac{1}{4^2-1}S_{2n}$	5
$8n$	Romberg 公式（R 公式）： $R_{8n}=\frac{4^3}{4^3-1}C_{8n}-\frac{1}{4^3-1}C_{4n}$	7
$16n$	D 公式： $D_{16n}=\frac{4^4}{4^4-1}R_{16n}-\frac{1}{4^4-1}R_{8n}$	9
$32n$	E 公式： $E_{32n}=\frac{4^5}{4^5-1}D_{32n}-\frac{1}{4^5-1}D_{16n}$	11
⋮	⋮	⋮

在实际计算中，逐次分半加速法可按如下表格逐行进行计算。当表中对角线上出现两个顺序接连的数之差为允许误差时，即可停止运算。

逐次分半加速表

分半次数	区间等分数	T 公式	S 公式	C 公式	R 公式	D 公式	E 公式
$i=0$	$2^0=1$	T_1					
1	$2^1=2$	T_2	S_2				
2	$2^2=4$	T_4	S_4	C_4			
3	$2^3=8$	T_8	S_8	C_8	R_8		
4	$2^4=16$	T_{16}	S_{16}	C_{16}	R_{16}	D_{16}	
5	$2^5=32$	T_{32}	S_{32}	C_{32}	R_{32}	D_{32}	E_{32}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例 计算定积分

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx,$$

并使误差不超过 0.0001。

【解】 (1) 在区间[1, 2]上用梯形公式得

$$T_1=\frac{1}{2}(f(1)+f(2))=\frac{3}{4}=0.75000。$$

(2) 将[1, 2]二等分

$$H_2=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\approx 0.66667,$$

$$T_2=\frac{1}{2}(T_1+H_2)\approx 0.70833,$$

$$S_2=\frac{4T_2-T_1}{4-1}\approx 0.69444。$$

(3) 将[1, 2]四等分

$$H_4=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)\right)\approx 0.68571,$$

$$T_4=\frac{1}{2}(T_2+H_4)\approx 0.69702,$$

$$S_4=\frac{4T_4-T_2}{4-1}\approx 0.69325,$$

$$C_4=\frac{4^2S_4-S_2}{4^2-1}\approx 0.69317。$$

(4) 将[1, 2]八等分

$$H_8=\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{9}{8}\right)+f\left(\frac{11}{8}\right)+f\left(\frac{13}{8}\right)+f\left(\frac{15}{8}\right)\right)\approx 0.69122,$$

$$T_8=\frac{1}{2}(T_4+H_8)\approx 0.69412,$$

$$S_8=\frac{4T_8-T_4}{4-1}\approx 0.69315,$$

$$C_8=\frac{4^2S_8-S_4}{4^2-1}\approx 0.69315,$$

$$R_8=\frac{4^3C_8-C_4}{4^3-1}\approx 0.69315。$$

由于 $|C_4-R_8|=0.00002<0.0001$，故计算可以停止。积分的近似值为 0.69315。

§4. Gauss 型公式

在§1中我们已经指出，n 个结点的内插型求积公式的代数精度至少为 $n-1$。那么自然会问，如果同时允许适当地选择求积系数和结点 x_k $(k=1, \cdots, n)$，则它的代数精度最多能提高到多少呢？Gauss 首先圆满地解决了这个问题。

事实上，由于 A_k 和 x_k 作为参数来看共有 $2n$ 个，因此如果令一个任意的 $2n-1$ 次多项式

$$f(x)=x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+a_2x^{2n-3}+\cdots+a_{2n-1}$$

(或者分别令 $f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^{2n-1}$) 代入 (1.5) 式的两端而令其精确相等时，则由于诸系数 a_i 的任意性，我们便得到 $2n$ 个联立的方程。正因为 A_k 和 x_k 恰好有 $2n$ 个，因此恰好

可以求出 A_k 与 x_k 的 $2n$ 个特殊的数值，俾使 $2n$ 个联立方程完全被满足。这样也就说明要使(1.5)式两端精确相等的代数多项式，其次数可以最多提高到 $2n-1$。换言之，形如(1.5)式的公式的代数精度最多可能提高到 $2n-1$。通常称具有最高代数精度的内插型求积公式为Gauss型公式。

定理3 欲使 n 个结点的内插求积公式(1.5)具有代数精度 $2n-1$，其充要条件是，结点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所构成之因次多项式 $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 必须与一切次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $Q(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $\rho(x)$ 为直交。

【证】 必要性：假设公式(1.5)具有代数精度为 $2n-1$。则对任意次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $Q(x)$，乘积多项式 $\omega(x)Q(x)$ 的次数自然是 $\leqslant 2n-1$，因而由题设

$$\int_a^b \rho(x)\omega(x)Q(x)dx=\sum_{k=1}^n A_k\omega(x_k)Q(x_k)=0,$$

亦即 $\omega(x)$ 与 $Q(x)$ 关于权 $\rho(x)$ 为直交。

充分性：假设 $\omega(x)$ 与任何次数 $\leqslant n-1$ 的多项式为直交。现在给定任意一个 $2n-1$ 次多项式 $f(x)$，由于恒可表 $f(x)=Q(x)\omega(x)+r(x)$，其中 $Q(x)$ 与 $r(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$，故立即得出(用及定理1)：

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x)f(x)dx&=\int_a^b \rho(x)Q(x)\omega(x)dx+\int_a^b \rho(x)r(x)dx\\&=0+\sum_{k=1}^n A_k r(x_k)\\&=\sum_{k=1}^n A_k[Q(x_k)\omega(x_k)+r(x_k)]\\&=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)。\end{aligned}$$

这表明公式(1.5)对 $f(x)$ 恒精确成立。定理证毕。

根据上述定理可知我们的问题归结为：给定了 $\rho(x)$ 与 n，究竟应如何来作因次多项式 $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，俾使 $\omega(x)$ 与任意次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $Q(x)$ 关于 $\rho(x)$ 恒直交，其中 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$。由第五章§5，知因次多项式 $\omega(x)$ 可表示成

$$\omega(x)=\frac{1}{\Delta_{n-1}}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n\end{vmatrix}。$$

定理4 设(1.5)为Gauss型内插求积公式，则其求积系数 A_k 皆为正，且 A_k 有一个与(1.6)等价的表达式：

$$A_k=\frac{1}{[\omega'(x_k)]^2}\int_a^b\frac{\rho(x)[\omega(x)]^2}{(x-x_k)^2}dx。\tag{4.1}$$

【证】 显然，多项式

$$f(x)=[\omega(x)/(x-x_k)]^2$$

的次数是不超过 $2n-2$ 的，并且容易看出

$$f(x_l)=\begin{cases}0, & l\neq k,\\ [\omega'(x_k)]^2, & l=k。\end{cases}$$

由于Gauss公式对其精确成立，故得

$$\int_a^b\rho(x)f(x)dx=\sum_{l=1}^n A_lf(x_l)=A_k[\omega'(x_k)]^2。$$

因为 $\int_a^b\rho(x)f(x)dx>0$，所以

$$A_k=\frac{1}{[\omega'(x_k)]^2}\int_a^b\rho(x)f(x)dx>0。$$

最后将 $f(x)$ 的多项式代入，便得到公式(4.1)。

定理5 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内 $2n$ 次连续可微，则Gauss型公式(1.5)的余项表达式为

$$E[f]=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)[\omega(x)]^2 dx, \qquad (4.2)$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$, $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$。

【证】 根据 Hermite 插值公式可以作出一个次数$\leqslant 2n-1$ 的多项式 $\varphi(x)$，使得 $\varphi(x_k)=f(x_k)$，$\varphi'(x_k)=f'(x_k)$ $(k=1, \cdots, n)$，并且

$$f(x)=\varphi(x)+\frac{[\omega(x)]^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta),$$

此处 $\eta=\eta(x)\in[a, b]$，$x_k\in[a, b]$ $(k=1, \cdots, n)$。

在上式两端乘以 $\rho(x)$后再积分，则得

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$
$$=\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx+\int_a^b \rho(x)\frac{[\omega(x)]^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta)dx。 \qquad (4.3)$$

既然 $\varphi(x)$是次数$\leqslant 2n-1$ 的多项式，故(4.3)右端的第一项为

$$\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^n A_k\varphi(x_k)=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)。$$

注意 $\rho(x)[\omega(x)]^2$ 非负，因此(4.3)式右端的余项可利用积分中值定理改写成

$$E[f]=\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)\int_a^b \rho(x)[\omega(x)]^2 dx。$$

这样便证明了定理 5。

由 § 2 定理 2 和定理 2′ 可知，即使 $f(x)$ 是一有限区间 $[a, b]$ 上的连续函数，关于积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的 n 点 Newton-Cotes 公式序列也不一定就收敛于积分的真值。现在，我们考虑 Gauss 型求积公式的相应问题。

定理 6 设$[a, b]$为一有限区间，并有 Gauss 型求积公式序列

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n}) \quad (n=2, 3, \cdots)。$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则此公式序列收敛于积分的真值。

【证】 我们需证，对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n})\right| < \varepsilon。$$

定义
$$C=\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}$$

和 $\varepsilon_1=\varepsilon/(3C)$。依 Weierstrass 定理，对给定的 ε_1，有 N 使得

$$|f(x)-Q_N(x)|<\varepsilon_1 \quad (x\in[a, b])。$$

若 $n>N$，则序列 (4.8) 中的 n 点公式对 $Q_N(x)$ 是精确的，从而当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n})\right| \\
&=\left|\int_a^b \rho(x)f(x)dx - \int_a^b \rho(x)Q_N(x)dx \right.\\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}Q_N(x_{k,n}) - \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n})\right| \\
&\leqslant\left|\int_a^b \rho(x)f(x)dx - \int_a^b \rho(x)Q_N(x)dx\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}Q_N(x_{k,n}) - \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n})\right| \\
&=\left|\int_a^b \rho(x)[f(x)-Q_N(x)]dx\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}[Q_N(x_{k,n})-f(x_{k,n})]\right| \\
&\leqslant\int_a^b \rho(x)|f(x)-Q_N(x)|dx
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{n} A_{k,n}|Q_N(x_{k,n})-f(x_{k,n})|$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int_a^b \rho(x)\,dx+\varepsilon_1 \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}$$

$$\leqslant 2C\varepsilon_1=2C\varepsilon/(3C)=\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon。$$

Gauss 型求积公式序列的收敛性比定理 6 的结论还要好。可以证明，这一公式序列当积分存在时就收敛于积分的真值。

§5. Gauss 公式和 Mehler 公式

Gauss 公式和 Mehler 公式都是一般的 Gauss 型公式的特别情形。因为它们很有用，所以值得专门来介绍一下。

古典的 Gauss 公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)+E[f], \qquad (5.1)$$

因此这是一般的 Gauss 型公式中令 $\rho(x)\equiv 1$, $[a, b]=[-1, 1]$所得的特别情形。

根据一般理论，我们知道公式中的结点 x_k 乃是 n 次因次多项式 $\omega(x)$ 的零点；而这个 $\omega(x)$ 必须与一切不超过 $n-1$ 次的多项式 $Q(x)$ 直交，亦即

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)Q(x)dx=0。$$

虽然这样的 $\omega(x)$ 总可以通过矩量

$$\mu_k=\int_{-1}^{1} x^k dx \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

作成的行列式表示出来，但是这样做毕竟是麻烦的。事实上，人们早已发现著名的 Legendre 多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

恰好具有上述 $\omega(x)$ 所要求的直交性，由于 $P_n(x)$ 也是 n 次多项式，因此它与我们所需要的 $\omega(x)$ 顶多差一个常数因子。容易看出

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\cdots,$$

因此所需要的 $\omega(x)$（即最高次项的系数是 1 的多项式）可以表成

$$\omega(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)。$$

这样，我们不仅解决了 Gauss 公式的结点问题，而且也可以利用所得到的 $\omega(x)$ 去解决求积系数的问题和求积公式的余项问题。显然

$$A_k=\int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(x-x_k)P_n'(x_k)}dx。\tag{5.2}$$

但是用这个公式来计算 A_k 还是不甚方便，事实上我们可以得到更简便的系数公式。试考虑积分

$$S_k=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-x_k}P_n'(x)dx,\tag{5.3}$$

注意被积函数为 $2n-2$ 次多项式，故由 Gauss 公式知

$$S_k=A_k[P_n'(x_k)]^2。\tag{5.4}$$

另一方面，如令

$$u=\frac{P_n(x)}{x-x_k},\quad dv=P_n'(x)dx,$$

则将(5.3)的右端进行分部积分，可知有

$$S_k=\left[\frac{P_n^2(x)}{x-x_k}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_n(x)\left(\frac{P_n(x)}{x-x_k}\right)'dx。\tag{5.5}$$

注意上式右端第二项内的被积函数又是 $2n-2$ 次多项式，它

应该精确地等于 Gauss 公式的求积和。又因 $P_n(x_k)=0$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, 故 (5.5) 式右端的积分等于零。注意 $P_n^2(\pm 1)=1$, 容易求出第一项的值为

$$S_k=\left[\frac{P_n^2(x)}{x-x_k}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{1-x_k}+\frac{1}{1+x_k}=\frac{2}{1-x_k^2}。$$

因此依(5.4)式,便得到了 A_k 的系数公式:

$$A_k=\frac{2}{(1-x_k^2)\left[P_n'(x_k)\right]^2}。\tag{5.6}$$

这样,我们已完全解决了 Gauss 公式的构造问题。

在验证 $P_n(x)$ 的直交性时,我们曾用分部积分法处理了积分

$$I=\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)dx,$$

现在就 $Q(x)\equiv P_n(x)$ 而言,则由同样的计算手续可得

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2 dx=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$=\frac{2}{2n+1}。\tag{5.7}$$

于是根据 Gauss 型求积公式余项的普遍公式,我们便可算出公式(5.1)的余项为

$$E[f]=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\left[\omega(x)\right]^2 dx$$

$$=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left[(2n)!\right]^3}f^{(2n)}(\xi),\tag{5.8}$$

其中 $-1\leqslant\xi\leqslant 1$。于此,我们用到了(5.7)式和

$$\omega(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)。$$

下面让我们再来简要地指出 Mehler 求积公式的结构形式。所谓 Mehler 公式就是如下的特别情形:

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [a, b]=[-1, 1]。$$

针对这种情形来说，具备直交性条件的因次多项式 $\omega(x)$ 恰好就是著名的 Чебышев 多项式

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)。 \tag{5.9}$$

它的明显表达式可由 $\cos n\theta$ 的展开式得出。$\tilde{T}_n(x)$ 的 n 个零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 便是 Mehler 公式的结点。再根据求积系数的一般公式，将 $\omega(x)\equiv\tilde{T}_n(x)$ 代入并作变数代换 $x=\cos\theta$，则可得出所需要的系数为

$$A_k=\frac{1}{\tilde{T}'_n(x_k)}\int_0^\pi\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-x_k}d\theta=\frac{\pi}{n}。 \tag{5.10}$$

上式中的三角函数（实际是 $n-1$ 次三角多项式）的积分值恰好等于 $\frac{\pi}{n}\tilde{T}'_n(x_k)$ 的事实，读者可作为一个习题来论证。

综上所述，可知 Mehler 公式的形式是

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)+E[f], \tag{5.11}$$

其中诸 x_k 恰好是 $\tilde{T}_n(x)=0$ 的一切根。

公式(5.11)的最大优点是求积系数都相同。这在应用时可以减少 $n-1$ 次乘法运算。

最后，我们不加证明地指出公式(5.11)的一个余项估计式

$$E[f]=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}}f^{(2n)}(\xi) \quad (-1\leqslant\xi\leqslant1)。 \tag{5.12}$$

这显当然应先假定 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在并连续。

例 试用 Gauss 公式计算定积分

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(3x^2+4)}}。$$

显然，如作变数替换 $x=\frac{1}{2}(t+1)$，则上述积分的积分区间便变为[-1, 1]，因而便可直接应用公式(5.1)。自然也可以直接利用与公式(5.1)完全等价而积分区间是[0, 1]的那个Gauss公式：

$$\int_0^1 F(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k^* F(x_k^*), \tag{5.1*}$$

此处 A_k^* 与 x_k^* 同公式(5.1)中的 A_k 与 x_k 的关系是

$$A_k^*=\frac{1}{2}A_k,\quad x_k^*=\frac{1}{2}(x_k+1)。$$

在Крылов的《近似计算方法讲义》一书中曾给出关于 $n=1, 2, \cdots, 8$ 的诸 A_k^* 与 x_k^* 之值。例如现在假定我们是利用4个结点的公式(5.1)*来计算积分 I，则由查表可知

k	x_k^*	A_k^*
1	0.069432	0.173927
2	0.330009	0.326073
3	0.669991	0.326073
4	0.930568	0.173927

在这里我们还看出求积系数 A_k^* 的分布是对称的，并且 $x_1^*+x_4^*=x_2^*+x_3^*=1$（亦即结点位置对[0, 1]的中点亦是对称的）。这个事实其实对一般的 n 来说也都成立。

既然有了 A_k^* 与 x_k^* 的具体数值，那末代入公式(5.1)*的右端便立刻得到所需要的积分值：

$$I \cong \sum_{k=1}^{4} A_k^* F(x_k^*)=0.402184。$$

同样，如果利用3个结点的公式来计算，则所得的数值是 $I\cong 0.402114$。这与上面所得的结果相比较，有4位小数是相

同的。因此可以认为所得的结果中至少有4位小数是可信的。亦即可取 $I\simeq 0.4021$。

§6. 三角精确度与周期函数的求积公式

在实际应用问题中有时遇到周期函数的定积分，因此有必要再讨论这种积分的近似求积法。

假定要计算的积分是 $I=\int_0^{2\pi} f(x)dx$，其中 $f(x)$ 是 x 的 2π 周期连续函数，即 $f(x+2\pi)=f(x)$，我们希望去建立带有 n 个结点的求积公式：

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)。\qquad (6.1)$$

根据 Weierstrass 的第二逼近定理，用三角多项式

$$T_m(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

可以一致地逼近周期连续函数，因此自然又使我们想到用三角多项式的次数 m 来规定求积公式(6.1)的精确度。

如果公式(6.1)对任意 m 次三角多项式说来都精确成立，而对 $m+1$ 次三角多项式即不恒成立，此时便称(6.1)的三角精确度为 m。

现在我们来证明无论怎样选取 A_k 和 x_k 都不能使公式(6.1)的三角精确度提高到 $\geqslant n$。让我们考虑 n 次三角多项式

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right),\qquad (6.2)$$

其中 x_k 为(6.1)右端求积和中的结点。由三角函数的和积互化公式易验证几个三角多项式的乘积仍是三角多项式，而次数等于连乘的多项式的次数之和。因此(6.2)显然是 n 次

三角多项式，假如设想(6.1)的三角精确度$\geqslant n$，则自然就会有

$$\int_0^{2\pi}\left[\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right)\right]dx=\sum_{j=1}^{n}A_jf(x_j)=0。$$

但上式的左端明明是>0，这个矛盾便证明了(6.1)的三角精确度无论如何不能超过$n-1$。

进一步还可以证明(6.1)确实可以达到最高可能的精确度$n-1$。这其实只须取等距结点和相等的系数$A_1=A_2=\cdots=A_n$即可办到。

在$[0, 2\pi]$中任取步长为$h=\frac{2\pi}{n}$的等距结点

$$x_k=x_1+(k-1)h \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

又假定一切系数为常数($A_k=A$)，在公式(6.1)中令$f(x)\equiv 1$，则

$$\int_0^{2\pi}dx=\sum_{k=1}^{n}A_k=nA,$$

因此可知$A=\frac{2\pi}{n}$。从而，公式(6.1)此时即变成如下的特殊形式：

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx\cong\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)。\tag{6.3}$$

易验证求积公式(6.3)确实具有三角精确度$n-1$，为此只须取$f(x)\equiv 1$, $\cos mx$, $\sin mx$ $(m=1, 2, \cdots, n-1)$来验证就可以了，自然同样地取

$$f(x)\equiv e^{imx} \quad (m=0, 1, 2\cdots, n-1; \ i=\sqrt{-1})$$

来验算一下亦就够了。当然$m=0$是无需验证的。以下可假定$0<m\leqslant n-1$。此时，我们有

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} e^{imx}dx = \frac{1}{im}[e^{imx}]_0^{2\pi} = 0;$$

另一方面，求积和也等于 0，原因是

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} e^{im(x_1+(k-1)h)} = e^{imx_1}\sum_{k=1}^{n} e^{im(k-1)h}$$

$$= e^{imx_1}\left(\frac{e^{imnh}-1}{e^{imh}-1}\right) = 0 \quad \left(h = \frac{2\pi}{n}\right)。$$

这就证明了关于精度所作的断言。

显然，如果被积函数的周期为 $T>0$，则只须作一变数代换即可将公式(6.3)变形为

$$\int_0^T f(x)dx = \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + E[f], \tag{6.4}$$

其中 $0 \leqslant x_1 \leqslant h$，$h = \frac{T}{n}$，$x_k = x_1 + (k-1)h$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。

例 试计算椭圆积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-0.5\sin^2\varphi}}。$$

注意被积函数为偶函数，且周期为 π，因此

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-0.5\sin^2\varphi}}。$$

我们可以对 $T=\pi$ 来利用公式 (6.4)。取 $n=6$ 及关于 $\varphi=0$ 为对称的结点 $x_{\pm1} = \pm\frac{\pi}{12}$，$x_{\pm2} = \pm\frac{\pi}{4}$，$x_{\pm3} = \pm\frac{5}{12}\pi$，于是由(6.4)式便得到(注意 $f(x_k) = f(-x_k)$)

$$2I \cong \frac{\pi}{3}\sum_{k=1}^{3} f(x_k)。$$

如果使用 6 位小数去计算，则得 $I = 1.854007$。以此和积分的精确值

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cong 1.854075$$

相比较，可见误差只是第五位小数上的7个单位。

第八章习题

1．试证 n 点 Newton-Cotes 公式中的系数满足 $A_{n-k+1}=A_k$。再利用这个结论证明：如果 n 是奇数，则 n 点 Newton-Cotes 公式对一切阶数 $\leqslant n$ 的多项式是准确的。

2．设已知一具有 d 次代数精度的求积公式，试证明对此公式做线性变换得到的新求积公式也具有 d 次代数精度。

3．试证明，只要积分存在，则复化梯形公式(2.9)形成的求积公式序列收敛于此积分的真值($n\to\infty$)。

4．试求关于 $[a, b]=[-1, 1]$ 和 $\rho(x)=x^2$ 的 2 点，3 点，4 点和 5 点 Gauss 公式。验证这些公式的代数精度分别是 3, 5, 7 和 9。

5．试求关于 $[a, b]=[0, 1]$ 和 $\rho(x)=x^6$ 的 2 点 Gauss 公式。

6．试证明 Mehler 公式(5.11)是可以从公式(6.4)推导出来的。

7．假定已知求积公式

$$\int_a^b f(x)dx\cong\sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

其中 $A_i>0$，且它对 $f(x)\equiv 1$ 是精确的。若 $f(x_i)$ 中的误差最多是 $\frac{1}{2}10^{-k}$，试证明由这个公式产生的误差不大于 $(b-a)\cdot\frac{1}{2}10^{-k}$。

8．证明求积公式

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a))$$

的代数精度是 3。

附录　Stirling 公式的证明

在数值逼近、渐近分析、概率理论、统计数学等部门中有着广泛应用的 Stirling 渐近公式

$$n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}\quad(n\to\infty)$$

已有多种证明。这里我们介绍一个较简短的证法，以供参考。

在初等数学分析的范围内来证明 Stirling 公式，通常都须用及下列两个熟知的极限式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\quad(\text{Wallis 乘积}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma\quad(\text{Euler 常数})。$$

下面来证明 Stirling 公式。注意

$$\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}。$$

对上式两边取对数，可得

$$\begin{aligned}n\log n-\log n!&=\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\sum_{k=1}^{n-1}k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}-\frac{1}{4k^3}+\cdots\right)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}a_k,\end{aligned}$$

这里

$$0<a_k=\frac{1}{3k^2}-\frac{1}{4k^3}+\frac{1}{5k^4}-\cdots<\frac{1}{3k^2},$$

所以于 $n\to\infty$ 时 $S_n=\sum_{1}^{n-1}a_k$ 趋向于确定值。

今将上面的等式改写为下述形式：

$$
\begin{aligned}
&n\log n-\log n!\\
&\quad=n-1-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n\right)-\frac{1}{2}\log n+S_n\\
&\quad=n-\frac{1}{2}\log n+\xi_n,
\end{aligned}
$$

其中于 $n\to\infty$ 时，变量 ξ_n 有一个确定的极限值 ξ，即

$$
\xi_n=-1-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n\right)+S_n\to\xi\quad(n\to\infty)。
$$

于是从上面改写后的等式两边取反对数，得

$$
n^n/n!=e^{\xi_n}\cdot e^n/\sqrt{n},
$$

也即

$$
n!=(n/e)^n\sqrt{n}\cdot e^{-\xi_n}。
$$

同理有

$$
(2n)!=(2n/e)^{2n}\sqrt{2n}\cdot e^{-\xi_{2n}}。
$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，所以只须将上述最后两式代入 Wallis 乘积，立即便可得到

$$
\lim_{n\to\infty}e^{-\xi_n}=e^{-\xi}=\sqrt{2\pi}。
$$

这就导出了所证公式

$$
n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}\quad(n\to\infty)。
$$

主要参考书

[1] Н. И. Ахиезер, 逼近论讲义(中译本), 程民德等译, 科学出版社, 北京, 1957.

[2] В. Л. Гончаров, 函数插补与逼近理论(中译本), 路见可译, 科学出版社, 北京, 1958.

[3] И. П. Натансон, 函数构造论(中译本), 上、中、下册, 何旭初等译, 科学出版社, 北京.

[4] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, New York. Blaisdell, 1963.

[5] G. G. Lorentz, Approximation of Functions, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1966.

[6] J. Todd, Constructive theory of functions, Academic Press, New York, 1963.

[7] П. П. Коровкин, 线性算子与逼近论(中译本), 郑维行译, 高等教育出版社, 北京, 1960.